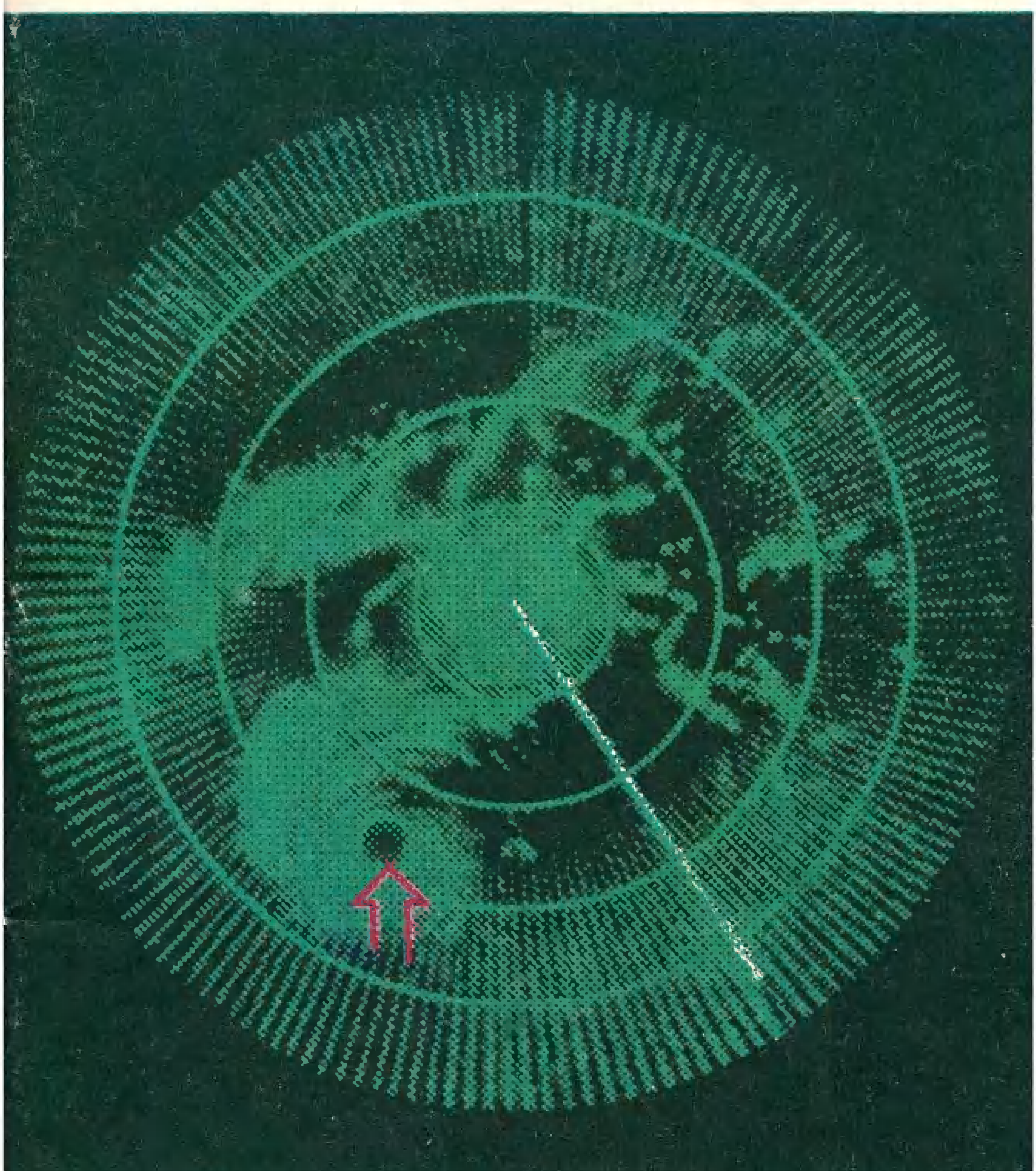
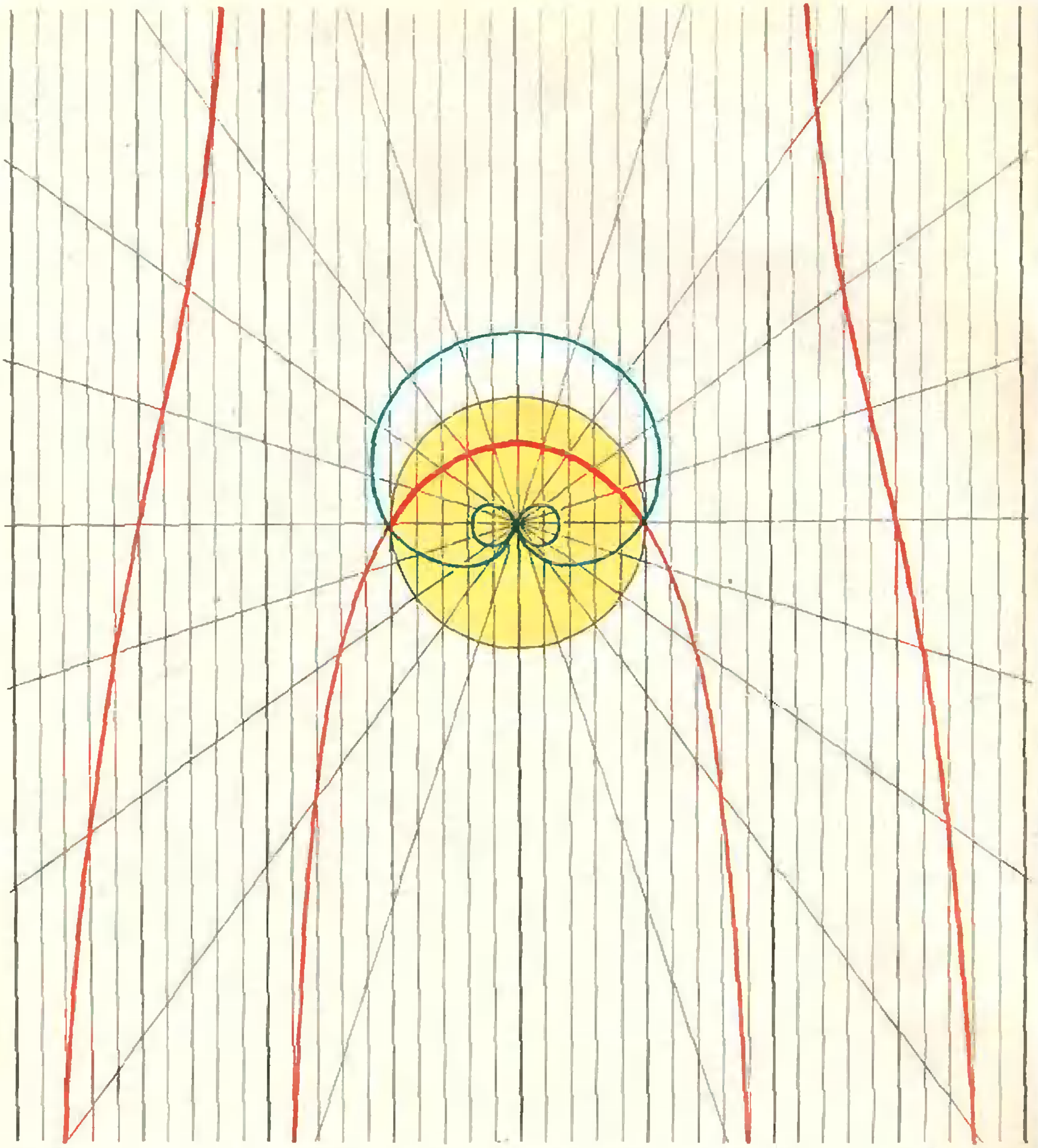
квант

8
1977

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





Здесь вы видите три кривые. Одна из них — окружность. Другая — «красная». — квадратриса Динострата. Изобретение ее приписывают знаменитому софисту Гиппию, жившему в пятом веке до н. э.,— одному из первых математиков, имена которых донесла до нас история. Гиппий использовал эту кривую для решения задачи о трисекции угла (поэтому ее называют также трисектрисой). Динострат (четвертый век до н. э.) использовал ее для решения задачи о квадратуре круга (отсюда — квадратриса). Оба они рассматривали только тот участок кривой, который выделен жирной линией.

Третья изображенная здесь кривая — кохлеоида — получается из квадратрисы Динострата в результате инверсии относительно нарисованной окружности. Ее название происходит от греческого κοχλος (улитка). Она напоминает линии, которые видны на ракушках некоторых двустворчатых моллюсков.

Подробнее об этих кривых читайте на с. 57.

Основан в 1970 году

Квант

8
1977

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

15 июля 1960 года ураган Абби приближался к Гондурасу. На экране радиолокатора он выглядел как и полагается «зрелому» урагану *(см. первую страницу обложки)* — имел четковыраженный «глаз» (на него указывает стрелка), окруженный белым кольцом — стеной дождевых облаков, вращающихся с ураганной скоростью. Об ураганах, циклонах и антициклонах, смерчах вы прочитаете в статье «Вихри, которые делают погоду» (см. с. 15).

Не считать ничего сделанным, если еще кое-что осталось сделать.

Гаусс.

С. Гиндикин

Карл Фридрих Гаусс

(К 200-летию со дня рождения)

В 1854 г. здоровье тайного советника Гаусса, как его именовали коллеги по Геттингенскому университету, решительно ухудшилось. Не могло быть и речи о продолжавшихся в течение двадцати лет ежедневных прогулках от Обсерватории до Литературного музея. Профессора, приближавшегося к восьмидесятилетнему рубежу, удалось уговорить обратиться к врачу! Летом ему стало лучше и он даже присутствовал на открытии железной дороги Ганновер — Геттинген. В январе 1855 г. Гаусс соглашается позировать художнику Геземану для медальона. По заказу Ганноверского двора уже после смерти ученого в феврале 1855 г. по этому медальону была изготовлена медаль. На медали под барельефом Гаусса было написано: Mathematicorum princeps (Король математиков). История всякого настоящего короля должна начинаться с детства, овеянного легендами. Гаусс в этом смысле не был исключением.

Брауншвейг, 1777—1795 гг.

Гаусс не получил свой титул по наследству, хотя его отец Гергард Дидерих не был вовсе чужд математике. Мастер на все руки, прежде всего фонтанный мастер, но также и садовник, как его отец, Гергард Дидерих был известен своими успехами в счетном ремесле. Его услугами пользовались купцы во время ярмарок в Брауншвейге и даже Лейпциге, а еще он имел постоянный заработок в самой большой похоронной кассе Брауншвейга (место, которое он передал по наследству сыну от первого брака Георгу — отставному солдату).

Карл Фридрих родился 30 апреля 1777 года в доме № 1550, что стоял на канале Венденгребене в Брауншвейге. По мнению биографов он унаследовал от родных отца крепкое здоровье, а от родных матери яркий интеллект. Ближе других был к будущему ученому дядя Фридерихс — искусный ткач, в котором, по словам племянника, «погиб прирожденный гений». Гаусс говорил про себя, что он *«умел считать раньше, чем говорить»*. Самая ранняя математическая легенда о нем утверждает, что в три года он следил за расчетами отца с каменщиками-поденщиками и неожиданно поправил отца, причем оказался прав.

В 7 лет Карл Фридрих поступил в Екатерининскую народную школу. Поскольку считать там начинали с третьего класса, первые два года на маленького Гаусса внимания не обращали.

В третий класс ученики обычно попадали в 10-летнем возрасте и учились там до конфирмации (15 лет). Учителю Бюттнеру приходилось заниматься одновременно с детьми разного возраста и разной подготовки. Поэтому он давал обычно части учеников длинные задания на вычисление, с тем чтобы иметь возможность беседовать с другими учениками. Однажды группе учеников, среди которых был Гаусс, было предложено просуммировать натуральные числа от 1 до 100. По мере выполнения задания ученики должны были класть на стол учителя свои грифельные доски. Порядок досок учитывался при выставлении оценок. 10-летний Гаусс положил свою доску, едва Бюттнер кончил диктовать задание. К всеобщему удивлению, лишь у него ответ был правилен. Секрет был прост: пока диктовалось задание, Гаусс успел переоткрыть формулу для суммы арифметической прогрессии! Слава о чуде-ребенке распространилась по маленькому Брауншвейгу.

В школе, где учился Гаусс, помощником учителя, основной обязанностью которого было чинить перья младшим ученикам, работал некто Бартельс, интересовавшийся математикой и имевший несколько математических книг. Гаусс и Бартельс начинают заниматься вместе; они знакомятся с биномом Ньютона, бесконечными рядами...

Как тесен мир! Через некоторое время Бартельс получит кафедру чистой математики в Казанском университете и будет учить математике Лобачевского.

В 1788 г. Гаусс переходит в гимназию. Впрочем, в ней не учат математике. Здесь изучают классические языки. Гаусс с удовольствием занимается языками и делает такие успехи, что даже не знает, кем он хочет стать — математиком или филологом.

О Гауссе узнают при дворе. В 1791 г. его представляют Карлу Вильгельму Фердинанду — герцогу Брауншвейгскому. Мальчик бывает во дворце и развлекает придворных искусством счета. Благодаря покровительству герцога Гаусс смог в октябре 1795 г. поступить в Геттингенский университет. Первое время он слушает лекции по филологии и почти не посещает лекций по математике. Но это не означает, что он не занимается математикой.

Любимейшая наука величайших математиков

Это один из многочисленных эпитетов, которыми Гаусс наделял арифметику (теорию чисел). К тому времени арифметика из набора изолированных наблюдений и утверждений уже превратилась в науку.

Позднее Гаусс напишет: *«Главным образом, более поздним исследователям, правда немногочисленным, но завоевавшим непреходящую славу, — таким, как Ферма, Эйлер, Лагранж, Лежандр, мы обязаны тем, что они нашли доступ к сокровищнице этой божественной науки и показали, какими богатствами она наполнена»*. Но всего этого еще не знает мальчик из Брауншвейга, который с поразительной скоростью переоткрывает то, на что у его великих предшественников ушли многие годы. Вот несколько тем, которые занимали его.

Гаусс рано подмечает, что остатки от деления квадратов целых чисел на простые числа p не могут быть любыми. Например, при делении на 3 остатки могут быть либо 0, либо 1; при делении на 5 — 0, 1 или 4. Но можно посмотреть на ситуацию и с другой стороны: для каких p существуют числа n^2, дающие при делении на p заданный остаток q? При $q = 1$ годятся любые p ($n = p + 1$), а вот остаток $p - 1$ для некоторых p получается, а для некоторых — нет: для $p = 3$ остатка 2 при делении квадрата не бывает, а при $p = 5$ остаток 4 бывает ($n = 3$), при $p = 7, 11, 19$ остатка $p - 1$ не бывает, а при $p = 13, 17$ бывает. Возникает гипотеза: если $p = 4k - 1$, то никакое n^2 при делении на p не дает остаток $p - 1$, а при $p = 4k + 1$ такое n^2 указать можно. Гаусс не знал, что эту гипотезу сформулировал до него еще Ферма и что справедливость ее была установлена Эйлером.

«Я случайно натолкнулся на одну изумительную арифметическую истину, и, так как она не только показалась мне прекрасной сама по себе, но и навела на мысль, что она связана и с другими выдающимися фактами, я со всей энергией взялся за то, чтобы выяснить принципы, на которых она основывается, и получить строгое ее доказательство. После того как это желание, наконец, осуществилось, прелесть этих исследований настолько увлекла меня, что я уже не мог их оставить».

Гаусс интересуется, для каких p числа n^2 могут давать остатки $q = 2, 3$ и т. д. Для $q = 2$ он догадывается, что все дело в остатке от деления p на 8 (это не удалось доказать Эйлеру, но доказал Лагранж), для $q = 3$ все определяется остатком от деления p на 12. Общее утверждение состояло в том, что все простые p, имеющие одинаковый остаток при делении на $4q$, либо одновременно могут давать остаток q при делении некоторого n^2 на p, либо не могут. Это утверждение Гаусс назвал «золотой теоремой»; сейчас его принято называть *квадратичным законом взаимности* *). «Золотая теорема» не поддалась первой атаке юного Гаусса. *«Эта теорема мучила меня целый год и не поддавалась напряженнейшим усилиям»*. Но это была та точка, в которой он «догнал» современную ему математику: усилия крупнейших математиков, пытавшихся доказать квадратичный закон взаимности, были безрезультатными.

Вот другая тема размышлений Гаусса. Маленького Гаусса радует, что если делить 1 на p, то через некоторое время десятичные знаки начинают повторяться — получается бесконечная десятичная периодическая дробь. Доказать периодичность не мудрено, а как сосчитать длину периода? Гаусс, не торопясь с выводами, перебирает простые числа подряд, не ленясь точно выписывать периоды. Это может показаться скучным занятием (например, для 97 период содержит 96 знаков), но Гаусс перебрал все $p < 1000$. Он установил, что длина периода всегда является делителем числа $p - 1$. (Это легко следует из Малой теоремы Ферма **), которую Гаусс передоказал.) Гаусса интересуют те p, для которых период в точности равен $p - 1$. Для этого достаточно, чтобы среди остатков от деления на p чисел $10, 10^2, \ldots, 10^{p-1}$ встречались все ненулевые остатки. Бесконечно или конечно число таких p, не известно по сей день.

---

*) См. статью «Золотая теорема» («Квант», 1973, № 1).

**) См. статью «Малая теорема Ферма» («Квант», 1972, № 10).

Гаусс подметил, что при делении чисел 3, 9, 27, ..., 3^{16} на 17 встречаются все возможные ненулевые остатки: 1, 2, ..., 16. Это наблюдение послужило толчком к первому великому открытию Гаусса — построению правильного 17-угольника *).

Гаусс знал, что циркулем и линейкой можно построить правильные n-угольники (или, что то же, разделить окружность на n равных частей) при $n = 3, 4, 5$. Он, конечно, понимал, что такие построения возможны также при $n = 2^k, 2^k\cdot 3, 2^k\cdot 5, 15$ $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}\right)$. По-видимому, Гаусс знал, что ни для каких других n древним построение выполнить не удалось.

Новое время принесло возможность перевести задачу построения правильного n-угольника на алгебраический язык. Возможность построения такого многоугольника циркулем и линейкой сводится к представлению корней **) уравнения $z^n - 1 = 0$ или (если отбросить корень $z = 1$) $z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1 = 0$ в виде квадратичных иррациональностей (т. е. выражению их через рациональные числа при помощи арифметических операций и извлечения квадратного корня).

Эта редукция позволила единообразно рассмотреть случаи, доступные древним, в то время как сами древние для каждого случая изыскивали особый способ.

Гаусс думал об *уравнении деления круга* (так называется вышеуказанное уравнение), одновременно размышляя о делимости чисел. 30 марта 1796 года он при пробуждении неожиданно увидел связь между этими задачами.

Пусть $n = 17$. Если ε — корень уравнения $z^{16} + z^{15} + \ldots + z + 1 = 0$, то $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^{16}$ — его остальные корни. Гаусс перенумеровал корни так, что ε^l получило номер k, если 3^k при делении на 17 имеет остаток l. При этом оказались занумерованными все 16 корней (см. выше). Обозначим так занумерованные корни через $t_1, t_2, \ldots, t_{16}$. Положим $u_1 = t_1 + t_3 + \ldots + t_{15}$, $u_2 = t_2 + t_4 + \ldots + t_{16}$; $v_1 = t_1 + t_5 + t_9 + t_{13}$, $v_2 = t_2 + t_6 + t_{10} + t_{14}$, $v_3 = t_3 + t_7 + t_{11} + t_{15}$, $v_4 = t_4 + t_8 + t_{12} + t_{16}$; $w_1 = t_1 + t_9$, $w_2 = t_2 + t_{10}, \ldots, w_8 = t_8 + t_{16}$. Оказывается, u_1, u_2 являются корнями квадратного уравнения, коэффициенты которого — целые числа; v_1, v_2, v_3, v_4 — корнями квадратного уравнения, коэффициенты которого выражаются через u_1, u_2; $w_1, w_2, \ldots, w_8$ выражаются аналогично через v_1, v_2, v_3, v_4; наконец, корни $t_1, t_2, \ldots, t_{16}$ — выражаются через $w_1, w_2, \ldots, w_8$. В результате получается нужное представление корней.

*) См. статью «Дебют Гаусса» («Квант», 1972, № 1).

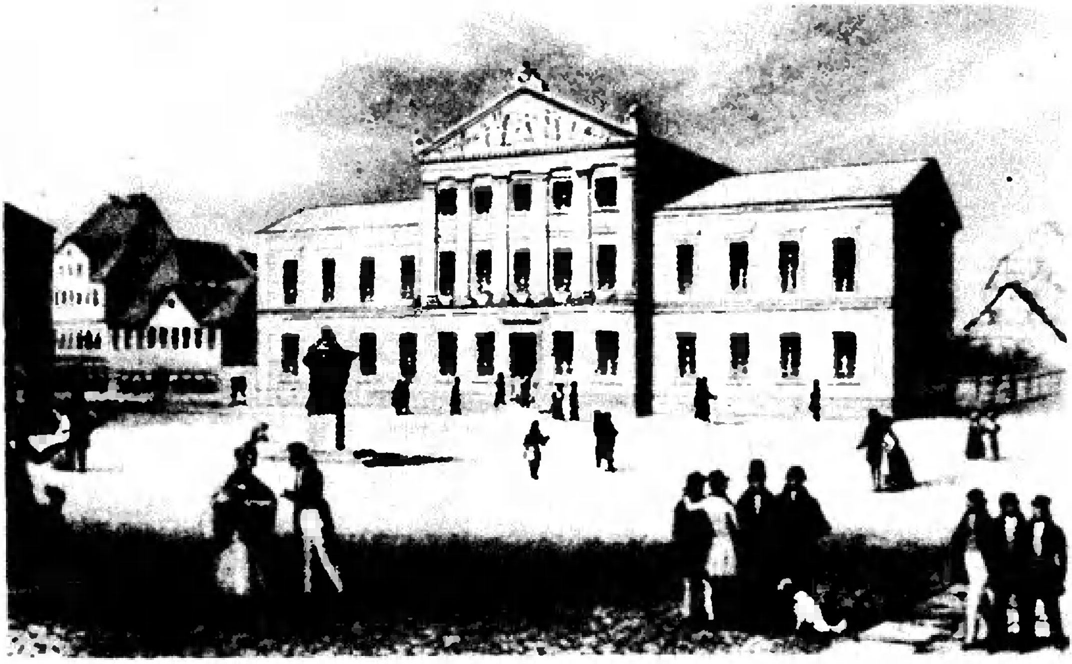
**) Здесь и ниже речь идет о комплексных корнях. Комплексные числа — расширение множества действительных чисел, введенное для того, чтобы любое квадратное уравнение имело корни. О комплексных числах можно прочитать, например, в книге Р. Куранта и Г. Роббинса «Что такое математика?» (М., изд-во «Просвещение», 1967).

Таким образом, Гаусс смог продвинуться в задаче, в которой со времени Евклида не было сделано ничего нового. Элементарность формулировки позволила сообщить об этом открытии в газете.

Позднее Гаусс решил проблему деления окружности полностью. Задача сводится к случаю простых n. Для простых n вида $2^{2^k} + 1$ (это так называемые *простые числа Ферма*) построение проходит по той же схеме, что и при $n = 17$. Следующее n такого вида равно 257. Есть сведения, что Гаусс не поленился провести подробные построения и для этого случая. Для простых n, не имеющих такого вида, построение, как доказал (но не опубликовал) Гаусс, невозможно (в частности, для $n = 7, 11$).

Теперь судьба Гаусса была решена: ни о какой филологии речь уже не шла. Он будет Математиком! На склоне лет Гаусс вспоминал, как бурлили в это время в его голове идеи. Он едва успевал делать отрывочные записи о том, чем занимается. Гаусс начинает вести дневник. Первая запись в нем датирована 30 марта 1796 г. Она посвящена построению правильного 17-угольника. Вторая (от 8 апреля) свидетельствует, что ему удалось доказать квадратичный закон взаимности. Из дневника мы узнаем, что великий математик продолжает учиться, аккуратно проделывая «студенческие» упражнения.

В 1798 г. Гаусс заканчивает университет и отправляется в родной Брауншвейг, чтобы записать свои



Геттингенский университет (совр. гравюра).

результаты по теории чисел. На эту работу ушло четыре напряженных года. В 1801 г. вышли знаменитые «Арифметические исследования» Гаусса. Эта огромная книга (более 500 страниц крупного формата) содержит основные результаты Гаусса: квадратичный закон взаимности, задачу деления круга, вопрос о представимости целых чисел в виде $am^2 + bmn + cn^2$ (в частности, в виде суммы квадратов). Книга была издана на средства герцога и ему посвящена. В изданном виде книга состояла из семи частей. На восьмую часть денег не хватило. В этой части речь должна была идти об обобщении квадратичного закона взаимности на степени выше второй, в частности — о биквадратичном законе взаимности. Полное доказательство биквадратичного закона Гаусс нашел лишь 23 октября 1813 г., причем в дневнике он отметил, что это совпало с рождением сына.

За пределами «Арифметических исследований» Гаусс по существу теорией чисел больше не занимался. Он лишь продумывал и доделывал то, что было задумано в те годы. Например, он придумал еще шесть разных доказательств квадратичного закона взаимности. «Арифметические исследования» сильно опередили свое время. В процессе их создания Гаусс не имел серьезных математических контактов, а вышедшая книга долго не была доступна никому из немецких математиков. Во Франции, где можно было рассчитывать на интерес Лагранжа, Лежандра и др., книге не повезло: обанкротился книготорговец, который должен был распространять книгу, и большая часть тиража пропала. В результате ученикам Гаусса приходилось позднее переписывать отрывки из книги от руки. Положение в Германии стало меняться лишь в сороковых годах, когда Дирихле основательно изучил «Исследования» и читал по ним лекции. А в Казань — к Бартельсу и его ученикам —книга попала в 1807 г.

«Арифметические исследования» оказали огромное влияние на дальнейшее развитие теории чисел и алгебры. Отталкиваясь от работы Гаусса о делении круга, Галуа пришел к решению вопроса о разрешимости уравнений в радикалах *). Законы взаимности до сих пор занимают одно из центральных мест в алгебраической теории чисел.

*) См. статью Н. Виленкина и В. Лишевского «Эварист Галуа» («Квант», 1973, № 10).

Молодой Гаусс. (1803 г.).

Гельмштадтская диссертация

В Брауншвейге Гаусс не имел литературы, необходимой для работы над «Арифметическими исследованиями». Поэтому он часто ездил в соседний Гельмштадт, где была хорошая библиотека. Здесь в 1798 г. Гаусс подготовил диссертацию, посвященную доказательству *Основной теоремы алгебры* — утверждения о том, что всякий многочлен с комплексными (в частности — с действительными) коэффициентами имеет комплексный корень (если хотеть оставаться в области действительных чисел, то Основную теорему алгебры можно сформулировать так: всякий многочлен с действительными коэффициентами раскладывается в произведение многочленов первой и второй степени). Гаусс критически разбирает все предшествующие попытки доказательства и с большой тщательностью проводит идею Даламбера. Безупречного доказательства все же не получилось, так как не хватало строгой теории непрерывности. В дальнейшем Гаусс придумал еще три доказательства Основной теоремы (последний раз — в 1848 г.).

Лемниската и арифметико-геометрическое среднее

Расскажем еще об одной линии в работах Гаусса, начавшейся в детстве.

В 1791 г., когда Гауссу было 14 лет, его занимала следующая игра. Он брал два числа a_0, b_0 и строил для них среднее арифметическое $a_1=\frac{a_0+b_0}{2}$ и среднее геометрическое $b_1=\sqrt{a_0b_0}$. Затем он вычислял средние от a_1, b_1: $a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$, $b_2=\sqrt{a_1b_1}$ и т. д. Гаусс вычислял обе последовательности с большим числом знаков. Очень скоро он уже не мог различить a_n и b_n — все вычисленные знаки совпадали. Другими словами, обе последовательности быстро стремились к общему пределу $M(a_0, b_0)$ (называемому *арифметико-геометрическим средним*).

В те же годы Гаусс много возился с кривой, называемой *лемнискатой* (или *лемнискатой Бернулли*), — множеством точек, произведение расстояний каждой из которых до двух фиксированных точек O_1, O_2 (*фокусов*) постоянно и равно $\left(\frac{1}{2}|O_1O_2|\right)^2$ (рис. 1). К систематическому изучению лемнискаты Гаусс перешел в 1797 г. Он долго пытается найти длину лемнискаты, пока не догадывается, что она равна $\frac{2\pi}{M(\sqrt{2}, 2)}|O_1O_2|$. Мы не знаем, как Гаусс сообразил это, но знаем, что было это 30 мая 1799 года и что, не имея вначале доказательства, он сосчитал обе величины с одиннадцатью (!) десятичными знаками. Гаусс придумал для лемнискаты функции, аналогичные тригонометрическим функциям для окружности. Например, для лемни-

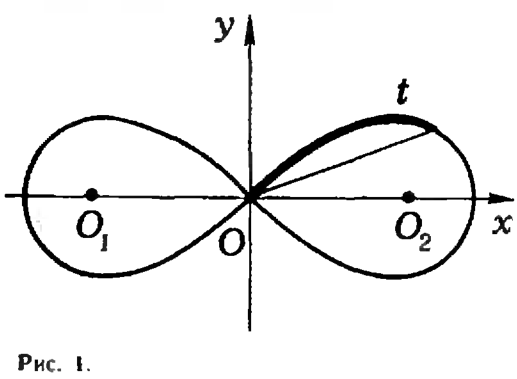


Рис. 1.

скаты, расстояние между фокусами которой равно $\sqrt{2}$, *лемнискатный синус* sl (t) — это просто длина хорды, соответствующей дуге длины t (рис. 1). Последние годы XVIII столетия у Гаусса уходят на построение теории лемнискатных функций. Для них были получены теоремы сложения и приведения, аналогичные теоремам для тригонометрических функций.

От лемнискатных функций Гаусс переходит к их обобщению — эллиптическим функциям. Он понимает, что речь идет *«о совершенно новой области анализа»*. После 1800 года Гаусс уже не смог уделять эллиптическим функциям столько времени, сколько было необходимо для доведения теории до состояния, удовлетворяющего его своей полнотой и строгостью. С самого начала он отказался от регулярных публикаций, надеясь опубликовать все разом, как это было с его арифметическими работами. Однако заботы так никогда и не доставили ему необходимого времени.

В 1808 г. он пишет своему другу и ученику Шумахеру: *«С круговыми и логарифмическими функциями мы умеем теперь обходиться как единожды один, но великолепный золотой родник, хранящий сокровенное высших функций, остается пока почти terra incognita* *) *Я очень много работал над этим прежде и со временем дам собственный большой труд об этом, на что я намекал еще в моих «Арифметических исследованиях». Приходишь в изумление от чрезвычайного богатства новых и в высшей степени интересных истин и соотношений, доставляемых этими функциями»*

Гаусс считал, что может не торопиться с публикацией своих результатов. Тридцать лет так и было. Но в 1827 г. сразу два молодых математика — Абель и Якоби — опубликовали многое из того, что было им получено.

«Результаты Якоби представляют часть моей собственной большой работы, которую я собираюсь когда-нибудь издать. Она будет представлять исчерпывающий труд на эту тему, если только небесам будет угодно продлить мою жизнь и даровать мне силы и душевный покой» (письмо Шумахеру)

«Господин Абель предвосхитил многие мои мысли и примерно на треть облегчил мою задачу, изложив результаты с большой строгостью и изяществом. Абель шел тем же путем, что и я в 1798 году, поэтому нет ничего невероятного в том, что мы получили столь похожие результаты. К моему удивлению, это сходство распространяется даже на форму, а местами и на обозначения, поэтому многие его формулы кажутся списанными с моих. Но чтобы никто не понял меня неправильно, я должен добавить, что не помню ни одного случая, когда я говорил об этих исследованиях с кем-нибудь из посторонних» (письмо Бесселю)

Наконец, в письме Креллю: *«Поскольку Абель продемонстрировал такую проницательность и такое изящество в вопросах изложения, я чувствую, что могу совершенно отказаться от опубликования полученных мной результатов»* (май 1828 г.)

Следует отметить, что замечание Гаусса в «Арифметических исследованиях» о том, что теорию деления круга можно перенести на лемнискату, оказало большое влияние на Абеля: *«Я долго размышлял над всеми этими вопросами, и мне в конце концов удалось приподнять завесу таинственности, окружавшую до сих пор теорию деления круга, созданную Гауссом. Теперь ход его рассуждений ясен мне как божий день»*

С наступлением нового века научные интересы Гаусса решительно сместились в сторону от чистой математики. Он много раз эпизодически будет обращаться к ней и каждый раз получать результаты, достойные гения. В 1812 г. он опубликовал работу о гипергеометрической функции. (Эта функция зависит от трех параметров. Придавая им конкретные значения, можно получить большинство функций, встречающихся в математической физике.) Широко известна заслуга Гаусса в геометрической интерпретации комплексных чисел. О его геометрических работах мы расскажем ниже. Однако никогда математика уже не будет главным делом его жизни. Характерный внешний штрих: в 1801 г. Гаусс прекращает регулярно вести дневник (хотя отдельные записи появляются до 1814 г.). Мы редко отдаем себе отчет, как короток был «математический век» Гаусса — менее 10 лет. При этом бо́льшую часть времени заняли работы, оставшиеся неизвестными современникам (эллиптические функции).

Малые планеты

Расскажем теперь о новом увлечении Гаусса. Биографы много спорили о причинах, по которым Гаусс начал заниматься астрономией.

*) Неизведанная область (лат.)

Прежде всего надо иметь в виду, что, начиная с работ Кеплера, Галилея и Ньютона, астрономия была наиболее ярким местом приложения математики. Эта традиция была продолжена в трудах Эйлера, Даламбера, Клеро, Лагранжа, Лапласа. Предсказывая и объясняя небесные явления, математики чувствовали себя как бы допущенными к тайнам мироздания. Гаусс, с его ранним интересом к конкретным вычислениям, не мог, конечно, не попробовать своих сил на этом традиционном поприще.

Впрочем, были причины и прозаические. Гаусс занимал скромное положение приват-доцента в Брауншвейге, получая 6 талеров в месяц. Пенсия в 400 талеров от герцога-покровителя не настолько улучшила его положение, чтобы он мог содержать семью, а он подумывал о женитьбе. Получить где-нибудь кафедру по математике было не просто, да Гаусс и не очень стремился к активной преподавательской деятельности. Расширяющаяся сеть обсерваторий делала карьеру астронома более доступной.

Гаусс начал интересоваться астрономией еще в Геттингене. Кое-какие наблюдения он проводил в Брауншвейге, причем часть герцогской пенсии он израсходовал на покупку секстанта. Он ищет достойную вычислительную задачу, решая пока мелкие задачи. Так, он публикует простой способ вычисления времени Пасхи и других циклических праздников вместо чрезвычайно путанных рецептов, которыми пользовались раньше. Мысль о настоящей задаче появилась в 1801 г. при следующих обстоятельствах.

1 января 1801 г. астроном Пиацци, составлявший звездный каталог, обнаружил неизвестную звезду 8-й звездной величины. Пронаблюдав за ней 40 дней, Пиацци обратился к крупнейшим астрономам с просьбой продолжить наблюдения. По разным причинам его просьба не была выполнена. В июне эти сведения дошли до Цаха, издававшего единственный в то время астрономический журнал. Цах высказал гипотезу, что речь идет *«о давно подозреваемой между Марсом и Юпитером, а теперь, по-видимому, открытой, новой большой планете»*. Гипотеза Цаха показалась правдоподобной, и надо было срочно искать «потерянную» планету. А для этого надо было вычислить ее траекторию. Определить эллиптическую траекторию по дуге в 9°, которую знал Пиацци, было за пределами вычислительных возможностей астрономов. В сентябре 1801 г., оставив все свои дела, вычислением орбиты занялся Гаусс. В ноябре вычисления были закончены. В декабрьском номере журнала Цаха они были опубликованы, а в ночь с 31 декабря на 1 января — ровно через год после наблюдений Пиацци — известный немецкий астроном Ольберс, основываясь на траектории, вычисленной Гауссом, нашел планету (ее назвали Церерой). Это была подлинная сенсация!

25 марта 1802 г. Ольберс открывает еще одну планету — Палладу. Гаусс быстро вычисляет ее орбиту, показав, что и она располагается между Марсом и Юпитером. Действенность вычислительных методов Гаусса стала для астрономов несомненной.

К Гауссу приходит признание. Одним из признаков этого было избрание его членом-корреспондентом Петербургской академии наук. Вскоре его пригласили занять место директора Петербургской обсерватории. Гаусс пишет, что ему лестно получить приглашение в город, где работал Эйлер, и серьезно думает о переезде. В письмах Гаусс пишет, что в Петербурге часто плохая погода, а потому он не будет слишком занят наблюдениями, и будет оставаться время для занятий. Он пишет также, что 1000 рублей, которые он будет получать, больше 400 талеров, которые он имеет сейчас, но жизнь в Петербурге дороже.

В то же время Ольберс предпринимает усилия, чтобы сохранить Гаусса для Германии. Еще в 1802 г. он предлагает куратору Геттингенского университета пригласить Гаусса на пост директора вновь организованной обсерватории. Ольберс пишет при этом, что Гаусс *«к кафедре математики имеет положительное отвращение»*. Согласие было дано, но переезд состоялся лишь в конце 1807 г.

За это время Гаусс женился (*«жизнь представляется мне весной со всегда новыми яркими цветами»*). В 1806 г. умирает от ран герцог, к которому Гаусс, по-видимому, был искренне привязан. Теперь ничто не удерживает его в Брауншвейге.

Жизнь Гаусса в Геттингене складывалась не сладко. В 1809 г. после рождения сына умерла жена, а затем и сам ребенок. Вдобавок Наполеон обложил Геттинген тяжелой контрибуцией. Сам Гаусс должен был заплатить непосильный налог в 2000 франков. За него попытались внести деньги Ольберс и, прямо в Париже, Лаплас. Оба раза Гаусс гордо отказался. Однако нашелся еще один благодетель, на этот раз — аноним, и деньги возвращать было некому (много позднее узнали, что это был курфюрст Майнцский, друг Гетё). *«Смерть мне милее такой жизни»*, — пишет Гаусс между заметками по теории эллиптических функций. Окружающие не ценили его работ, считали его, по меньшей мере, чудаком. Ольберс успокаивает Гаусса, говоря, что не следует рассчитывать на понимание людей: *«их нужно жалеть и им служить»*.

В 1809 г. выходит законченная в 1807 г. знаменитая «Теория движения небесных тел, обращающихся вокруг Солнца по коническим сечениям». Задержка произошла отчасти из-за опасений издателя, что книга на немецком языке не найдет спроса, а Гаусс из патриотических соображений отказывался печатать книгу по-французски. Компромисс состоял в издании книги на латыни. Это единственная книга Гаусса по астрономии (сверх этого он напечатал несколько статей).

Гаусс излагает свои методы вычисления орбит. Чтобы убедиться в силе своего метода, он повторяет вычисление орбиты кометы 1769 г., которую в свое время за три дня напряженнейшего счета вычислил Эйлер, потерявший после этого зрение. Гауссу на это потребовался час. В книге был изложен метод наименьших квадратов, оставшийся по сей день одним из самых распространенных методов обработки результатов наблюдений. Гаусс указывает, что он знает этот метод с 1794 г., а с 1802 г. систематически им пользуется. (За два года до выхода «Теории движения» Гаусса метод наименьших квадратов был опубликован Лежандром.)

На 1810 г. пришлось большое число почестей: Гаусс получил премию Парижской академии наук и Золотую медаль Лондонского королевского общества, был избран в несколько академий.

В 1804 г. Парижская академия выбрала в качестве темы для большой премии (золотая медаль весом 1 кг) теорию возмущений Паллады. Срок дважды переносился (до 1816 г.) в надежде, что Гаусс представит работу. Гауссу помогал в вычислениях его ученик Николаи (*«юноша, неутомимый в вычислениях»*), и все же вычисления не были доведены до конца. Гаусс прервал их, находясь в тяжелой депрессии.

Регулярные занятия астрономией продолжались почти до самой смерти. Знаменитую комету 1812 г. (которая «предвещала» пожар Москвы!) всюду наблюдали, пользуясь вычислениями Гаусса. 28 августа 1851 года Гаусс наблюдал солнечное затмение. У Гаусса было много учеников-астрономов (Шумахер, Герлинг, Николаи, Струве). Крупнейшие немецкие геометры Мёбиус и Штаудт учились у него не геометрии, а астрономии. Он состоял в активной переписке со многими астрономами, регулярно читал статьи и книги по астрономии, печатал рецензии. Из писем астрономам мы многое узнаем и о занятиях математикой. Как не похож облик Гаусса-астронома на представление о недоступном отшельнике, существовавшее у математиков!

Геодезия

К 1820 г. центр практических интересов Гаусса переместился в геодезию. Еще в начале века он пытался воспользоваться результатами измерений дуги меридиана, предпринятых французскими геодезистами для установления эталона длины (метра), чтобы найти истинное сжатие Земли. Но дуга оказалась слишком мала. Гаусс

Надпись на гербе Гаусса гласит «Немного, но зрело».

мечтал провести измерение достаточно большой дуги меридиана. К этой работе он смог приступить только в 1820 г. Хотя измерения растянулись на два десятилетия, Гаусс не смог осуществить свой замысел в полном объеме. Большое значение имели полученные в связи с геодезией исследования по обработке результатов измерений (к этому времени относятся основные публикации о методе наименьших квадратов) и различные геометрические результаты, связанные с необходимостью проводить измерения на поверхности эллипсоида.

В 20-е годы обсуждался вопрос о переезде Гаусса в Берлин, где он должен был стать во главе института. Сюда должны были быть приглашены наиболее перспективные молодые математики, прежде всего Якоби и Абель. Переговоры затянулись на четыре года; разногласия были по поводу того, должен ли Гаусс читать лекции, и сколько ему должны платить в год — 1200 или 2000 талеров. Переговоры окончились безрезультатно. Впрочем, не совсем: в Геттингене Гауссу стали платить то жалование, на которое он претендовал в Берлине.

Внутренняя геометрия поверхностей

Геодезии мы обязаны тем, что на сравнительно короткое время математика вновь стала одним из главных дел Гаусса. В 1816 г. он думает об обобщении основной задачи картографии — задачи от отображении одной поверхности на другую *«так, чтобы отображение было подобно отображаемому в мельчайших деталях»*. Гаусс посоветовал Шумахеру выбрать этот вопрос при объявлении конкурса на премию Копенгагенского научного общества. Конкурс был объявлен в 1822 г. В том же году Гаусс представил свой мемуар, в котором вводятся характеристики, позволяющие полностью решить проблему, частные случаи которой изучались Эйлером и Лагранжем (отображение сферы или поверхности вращения на плоскость). Гаусс подробно описывает выводы из его теории для многочисленных конкретных случаев, часть из которых возникает из задач геодезии.

В 1828 г. вышел в свет основной геометрический мемуар Гаусса «Общие исследования о кривых поверхностях». Мемуар посвящен *внутренней геометрии поверхности*, т. е. тому, что связано со структурой самой этой поверхности, а не с ее положением в пространстве.

Образно говоря, внутренняя геометрия поверхности — это то, что можно узнать о геометрии поверхности «не покидая ее»*). На поверхности можно измерять длины, натягивая нить так, чтобы она целиком лежала на поверхности. Возникающая кривая называется *геодезической* (аналог прямой на плоскости). Можно измерять углы между геодезическими, изучать геодезические треугольники и многоугольники. Если мы будем изгибать поверхность (считая ее нерастяжимой и неразрываемой пленкой), то расстояния между точками будут сохраняться, геодезические будут оставаться геодезическими и т. д.

Оказывается, «не покидая поверхности», можно узнать, кривая она или нет. «Настоящую» кривую поверхность ни при каком изгибании нельзя развернуть на плоскость. Гаусс предложил числовую характеристику меры искривления поверхности.

Рассмотрим около точки A на поверхности окрестность площади ε. В каждой точке этой окрестности проведем *нормаль* (перпендикуляр к поверхности) единичной длины. Для плоскости все нормали будут параллельны, а для кривой поверхности будут расходиться. Перенесем нормали так, чтобы их начала оказались в одной точке. Тогда концы нормалей заполнят некоторую фигуру на единичной сфере. Пусть $\varphi(\varepsilon)$ — площадь этой фигуры. Тогда $k(A) =$

---

*) См. статью В. Ефремовича «Пространство и внутренняя геометрия поверхностей» («Квант», 1977, № 1).

Гаусс в старости.

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}$ дает меру кривизны поверхности в точке A. Оказывается, ни при каком изгибании $k(A)$ не меняется. Для того чтобы кусок поверхности можно было развернуть на плоскость, необходимо, чтобы во всех точках A этого куска было $k(A)=0$. Мера кривизны связана с суммой углов геодезического треугольника.

Гаусс интересуется поверхностями постоянной кривизны. Сфера является поверхностью постоянной положительной кривизны (во всех ее точках $k(A)=\frac{1}{R}$, где R — радиус). В черновых записях Гаусса упоминается поверхность вращения постоянной отрицательной кривизны. Потом ее назовут *псевдосферой*, и Бельтрами обнаружит, что ее внутренняя геометрия есть геометрия Лобачевского.

Неевклидова геометрия

По некоторым сведениям Гаусс интересовался постулатом о параллельных еще в Брауншвейге в 1792 г. В Геттингене он много обсуждал проблему параллельных со студентом из Венгрии Фаркашем Бойяи. Из письма 1799 г., адресованного Ф. Бойяи, мы узнаем, насколько ясно понимает Гаусс, что имеются многочисленные утверждения, приняв которые, можно доказать пятый постулат: «*Я достиг многого, что для большинства могло бы сойти за доказательство*». И вместе с тем: «*Однако дорога, которую я выбрал, ведет скорее не к желательной цели, а к тому, чтобы сделать сомнительной истинность геометрии*». Отсюда до понимания возможности неевклидовой геометрии один шаг, но он все-таки еще не был сделан, хотя эта фраза часто ошибочно воспринимается как свидетельство того, что Гаусс пришел к неевклидовой геометрии уже в 1799 г.

Заслуживают внимания слова Гаусса, что он не имеет возможности уделить достаточно времени этим вопросам. Характерно, что о проблеме параллельных нет ничего в дневнике. По-видимому, она никогда не находилась в центре внимания Гаусса. В 1804 г. Гаусс опровергает попытки Ф. Бойяи доказать постулат о параллельных. Письмо заканчивается так: «*Однако я еще надеюсь на то, что некогда, и еще до моего конца, эти подводные камни позволят перебраться через них*». Похоже, что эти слова означают надежду, что доказательство будет найдено.

Вот еще несколько свидетельств: «*В теории параллельных мы до сих пор не опередили Евклида. Это позорная часть математики, которая, рано или поздно, должна принять совершенно другой вид*» (1813 г.). «*Мы не продвинулись дальше того места, где был Евклид 2000 лет назад*» (1816 г.). Однако в том же 1816 г. он говорит о «*пробеле, который нельзя заполнить*», а в 1817 г. в письме Ольберсу мы читаем: «*Я все больше прихожу к убеждению, что необходимость нашей геометрии не может быть доказана, по крайней мере, человеческим умом и для человеческого ума. Может быть, в другой жизни мы придем к другим взглядам на природу пространства, которые нам теперь недоступны. До тех пор геометрию следует ставить в ряд не с арифметикой, существующей чисто априори, а скорее с механикой*».

Примерно в то же время к мысли о невозможности доказать пятый постулат пришел юрист из Кенигсберга Швейкарт. Он предположил, что наряду с евклидовой геометрией существует «астральная геометрия», в которой постулат о параллельных не имеет места. Работавший в Кенигсберге ученик Гаусса Герлинг написал учителю о мыслях Швейкарта и приложил заметку последнего. В ответе Гаусс пишет: «*Почти все списано с моей души*». Деятельность Швейкарта продолжил его племянник Тауринус, с которым Гаусс обменялся несколькими письмами, начиная с 1824 г.

В письмах Гаусс подчеркивает, что его высказывания носят сугубо частный характер и их ни в коем случае не следует придавать гласности. Он не верит, что эти идеи могут быть восприняты, и боится заинтересованности толпы дилетантов. Гаусс пережил немало тяжелых лет и очень дорожит возможностью спокойно работать. Он предупреждает Герлинга, который собирался лишь упомянуть, что постулат о параллельных может оказаться неверен: *«Но осы, гнездо которых Вы разрушаете, поднимутся над Вашей головой»*. Постепенно зреет решение записать результаты, но не публиковать их: *«Вероятно, я еще не скоро смогу обработать свои пространные исследования по этому вопросу, чтобы их можно было опубликовать. Возможно даже, я не решусь на это во всю свою жизнь, потому что боюсь крика беотийцев*), который поднимется, если я выскажу свои воззрения целиком»* (письмо Бесселю 1829 г.). В мае 1831 г. Гаусс начинает систематические записи. *«Вот уже несколько недель, как я начал излагать письменно некоторые результаты моих собственных размышлений об этом предмете, частично имеющих уже 40-летнюю давность, но никогда мною не записанных, вследствие чего я должен был 3 или 4 раза возобновлять весь труд в моей голове. Мне не хотелось бы, однако, чтобы это погибло вместе со мной»* (письмо Шумахеру).

Однако в 1832 г. он получил от Фаркаша Бойяи небольшое сочинение его сына Яноша «Аппендикс» (название связано с тем, что оно было издано в виде приложения к большой книге отца). *«Мой сын ставит на твое суждение больше, чем на суждение всей Европы»*. Содержание книги поразило Гаусса: в ней полно и систематически строилась неевклидова геометрия. Это были не отрывочные замечания и догадки Швейкарта — Тауринуса. Такое изложение собирался получить сам Гаусс в ближайшее время. Он пишет Герлингу: *«...я нашел все мои собственные идеи и результаты, развитые с большим изяществом, хотя, вследствие сжатости изложения, в форме, трудно доступной тому, кому чужда эта область... Я считаю, что этот юный геометр Бойяи — гений первой величины»*. А вот, что написано отцу: *«...все содержание этой работы, путь, по которому твой сын пошел, и результаты, которые он получил, — почти сплошь совпадают с моими, которые я частично получил уже 30—35 лет тому назад. Я действительно этим крайне поражен. Я имел намерение о своей собственной работе, кое-что из которой я теперь нанес на бумагу, при жизни ничего не публиковать... я имел намерение..., чтобы эти мысли, по крайней мере, не погибли со мной. Я поэтому чрезвычайно поражен случившимся — оно освобождает меня от этой необходимости; и меня очень радует, что именно сын моего старого друга таким удивительным образом меня предвосхитил»*. Никакой публичной оценки или поддержки Янош Бойяи от Гаусса не получил. По-видимому, одновременно Гаусс прервал систематические записи по неевклидовой геометрии, хотя сохранились эпизодические заметки, относящиеся к 40-м годам.

*) По преданию жители Беотии славились в Древней Греции своей глупостью.

В 1841 г. Гаусс познакомился с немецким изданием работы Лобачевского (первые публикации Лобачевского относятся к 1829 г.). Верный себе, Гаусс интересуется другими публикациями автора, ограничиваясь высказываниями о нем в переписке с близкими корреспондентами. Впрочем, по предложению Гаусса, в 1842 г. Лобачевского, «как одного из превосходнейших математиков русского государства», избрали членом-корреспондентом Геттингенского ученого королевского общества. Гаусс лично известил Лобачевского об избрании. Однако ни в представлении Гаусса, ни в дипломе, выданном Лобачевскому, неевклидова геометрия не упоминалась.

О работах Гаусса по неевклидовой геометрии узнали лишь при публикации посмертного архива. Так Гаусс обеспечил себе возможность спокойно работать отказом обнародовать свое великое открытие, вызвав несмолкающие по сей день споры о допустимости занятой им позиции.

Следует отметить, что Гаусса интересует не только чисто логический вопрос о доказуемости постулата о параллельных. Его интересует место геометрии в естественных науках, вопрос об истинной геометрии нашего физического мира (см. выше высказывание 1817 г.). Он обсуждает возможность астрономической проверки, с интересом отзываясь о соображениях по этому поводу Лобачевского. При занятиях геодезией Гаусс не удержался от измерения суммы углов треугольника с вершинами Высокий Гаген, Брокен, Инсельберг. Отклонение от 2π не превысило $0{,}2'$.

Электродинамика и земной магнетизм

К концу 20-х годов Гаусс, перешедший 50-летний рубеж, начинает поиски новых для себя областей научной деятельности. Об этом свидетельствуют две публикации 1829 и 1830 гг. Первая из них несет печать размышлений об общих принципах механики (здесь строится «принцип наименьшего принуждения» Гаусса); другая посвящена изучению капиллярных явлений. Гаусс решает заниматься физикой, но его узкие интересы еще не определились. В 1831 г. он пытается заниматься кристаллографией. Это очень трудный год в

жизни Гаусса: умирает его вторая жена, у него начинается тяжелейшая бессонница. В этом же году в Геттинген приезжает приглашенный по инициативе Гаусса 27-летний физик Вильгельм Вебер. Гаусс познакомился с ним в 1828 г. в доме Гумбольдта. Гауссу было 54 года; о его замкнутости ходили легенды, и все же в Вебере он нашел сотоварища по занятиям наукой, какого он никогда не имел прежде.

«Внутреннее различие этих людей достаточно выражалось также и в их внешнем облике. Гаусс — приземистый, крепкого телосложения, настоящий представитель Нижней Саксонии, малоразговорчивый и замкнутый в себе. Своеобразной противоположностью ему является небольшой, изящный, подвижный Вебер, чрезвычайная любезность и разговорчивость которого сразу же обнаруживали коренного саксонца: он был действительно родом из Виттенберга, этой страны «саксонцев в квадрате». На геттингенском памятнике Гауссу и Веберу эта противоположность их художественных соображений смягчена и даже по возрасту они кажутся более близкими, чем это было в действительности». (Клейн)

Интересы Гаусса и Вебера лежали в области электродинамики и земного магнетизма. Их деятельность имела не только теоретические, но и практические результаты. В 1833 г. они изобретают электромагнитный телеграф (это событие запечатлено в их общем памятнике). Первый телеграф связывал обсерваторию и физический институт. По финансовым причинам внедрить телеграф в жизнь его создателям не удалось.

В процессе занятий магнетизмом Гаусс пришел к выводу, что системы физических единиц надо строить, вводя некоторые количество независимых величин и выражая остальные величины через них.

Изучение земного магнетизма опиралось как на наблюдения в магнитной обсерватории, созданной в Геттингене, так и на материалы, которые собирались в разных странах «Союзом для наблюдения над земным магнетизмом», созданным Гумбольдтом после возвращения из Южной Америки. В это же время Гаусс создает одну из важнейших глав математической физики — теорию потенциала.

Совместные занятия Гаусса и Вебера были прерваны в 1843 г., когда Вебера вместе с шестью другими видными профессорами изгнали из Геттингена за подписание письма королю, в котором указывались нарушения последним конституции (Гаусс не подписал письма). Возвратился в Геттинген Вебер лишь в 1849 г., когда Гауссу было уже 72 года.

* * *

Мы закончим наш рассказ о Гауссе словами Клейна: «*Гаусс напоминает мне образ высочайшей вершины баварского горного хребта, какой она предстает перед глазами наблюдателя, глядящего с севера. В этой горной цепи в направлении с востока на запад отдельные вершины подымаются все выше и выше, достигая предельной высоты в могучем, высящемся в центре великане; круто обрываясь, этот горный исполин сменяется низменностью новой формации, в которую на много десятков километров далеко проникают его отроги, и стекающие с него потоки несут влагу и жизнь*».

Портрет Гаусса на с. 2 прислан профессором К. Р. Бирманом из ГДР.

Л. Алексеева

Вихри, которые «делают погоду»

«...символические спирали, как бы олицетворяющие грозный атмосферный вихрь, можно встретить на изображениях идолов и божеств, дошедших до нас со времени древних цивилизаций.
...Идол с берегов Океиини — бог бурь у племени маори в Новой Зеландии — тоже украшен многочисленными спиралями.»

Н. Ситников. «Бетси, Камила и другие...»

Удивительное это образование — вихрь! От других потоков однородной жидкости или газа он отличается только характером движения, включающим вращение вокруг внутренней оси. Но, по сравнению с другими потоками, вихрь обладает замечательной целостностью, устойчивостью и долгоживучестью (см. «Квант» № 4, 1971 г.)

Высоко под потолок летят вихревые дымные кольца, выпущенные курильщиком, тогда как дым от его папиросы, едва поднявшись, разбивается на струйки, перемешивается с воздухом и расплывается. Классические опыты с большими вихревыми кольцами, которые со стуком ударялись о стену лаборатории, описаны в статье американского физика-экспериментатора Р. Вуда (см. «Квант» № 12, 1971 г.).

В природе вихри возникают во множестве. Они появляются в той части потока, где скорость быстро меняется в направлении, перпендикулярном потоку. Каждому случалось видеть вихри в быстрой реке на переходе от быстрины к замедленному течению у берега. Целая цепочка вихрей может тянуться за движущимся предметом, скажем, автомобилем. Их особенно удобно наблюдать на шоссе в метельные дни, когда машина обдувается крепким встречным ветром, а хлопья снега проявляют движение прозрачного воздуха. Такие же вихри появляются при обтекании препятствий.

Вихревой характер сильного ветра был замечен в 1821 г. У. Рэдфилдом, содержателем небольшого магазина в штате Коннектикут (США), который, объезжая после шторма районы штата, обратил внимание на поваленные ветром деревья. В одном месте деревья лежали макушками к северо-западу, тогда как на некотором расстоянии макушки указывали прямо противоположное направление. Отсюда У. Рэдфилд сделал вывод, что шторм представлял собой вращательную систему ветров. Беседуя с моряками и анализируя судовые журналы, он установил направление вращения крупных вихрей и нашел траектории их центров. В 1831 г. вышел труд У. Рэдфилда, излагающий результаты его исследований. Близкие взгляды высказывал немецкий ученый В. Дове. В эти же годы были построены первые ветровые карты.

Вообще, вихревые движения характерны для атмосферы Земли. Однако далеко не все вихри «делают погоду». Погода на земном шаре в сильной степени зависит от присутствия гигантских атмосферных вихрей-циклонов и антициклонов, задающих ветровой режим в данном районе Земли.

В вихревой системе, называемой циклоном (рис. 1), атмосферное давление понижается от периферии к центру. Поэтому вблизи поверхности Земли воздушные течения направлены к центру циклона. Все циклоны имеют вращательную составляющую скорости ветра. В Северном полушарии она направлена против часовой стрелки, в Южном — по часовой. В развивающихся циклонах (т. е. таких, у которых давление в центре продолжает падать) наблюдаются восходящие потоки. При этом образуется мощная облачность и выпадают осадки.

Последние два свойства циклона очевидно связаны между собой. В самом деле, выделим мысленно некоторый объем воздуха и посмотрим, что произойдет при его подъеме. Попадая в более разреженные слои атмосферы, этот объем расширяется, температура воздуха внутри него падает, и содержащийся в нем водяной пар конденсируется.

Направление вращения циклонов в различных полушариях можно объяснить закручивающим действием силы Кориолиса (подробнее см. «Квант» № 2, 1975 г.), связанной с суточным вращением Земли. Напомним известный факт, что отклоняющее действие этой силы заставляет реки подмывать свои правые берега. Воздушный поток не удерживается берегом, и поэтому при своем движении к центру он будет отклоняться вправо, если смотреть в сторону центра, т. е. против часовой стрелки при взгляде сверху.

Заметим, что возле самого экватора в полосе широт $\leq 5^\circ$ по обе стороны мощные вихри не образуются. Этот факт хорошо вяжется с приведенным объяснением, поскольку на экваторе горизонтальная составляющая силы Кориолиса равна нулю.

В вихревой системе антициклона все наоборот: давление возрастает, достигая максимума в центре вихря. В развивающемся антициклоне присутствуют нисходящие потоки. Опускаясь, газ нагревается и удаляется от состояния насыщения водяным паром. Поэтому для антициклона характерна ясная малооблачная погода. Антициклоны вращаются по часовой стрелке в Северном полушарии и против часовой стрелки в Южном. Направление вращения антициклона объясняется также закручивающим действием силы Кориолиса.

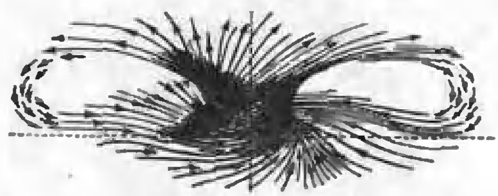


Рис. 1. Стрелками указаны направления ветров в циклоне.

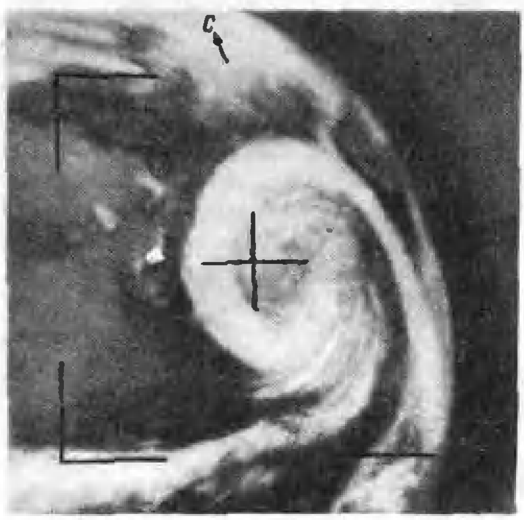


Рис. 2.

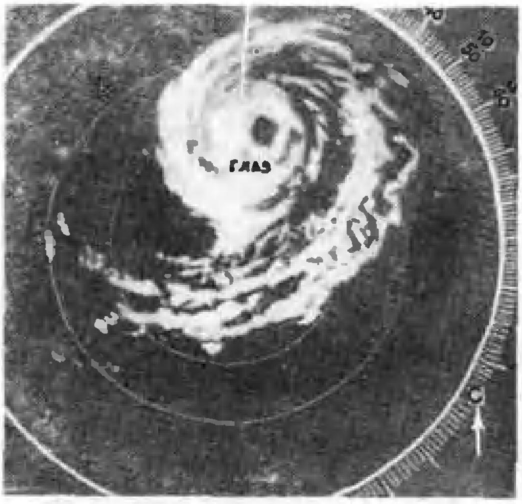


Рис. 3.

Рис. 4.

В зависимости от места зарождения циклоны делят на тропические и *внетропические*.

Рисунки 2 и 3 представляют вид сверху, соответственно, внетропического и тропического циклонов. Внетропический циклон (называемый иногда просто циклоном) — это самый крупный атмосферный вихрь, достигающий нескольких тысяч километров в поперечнике. Высота его колеблется между 2—4 и 15—20 *км*. Скорость ветра в нем в большинстве случаев не превосходит 40—70 *км/час*.

Поперечный размер тропического циклона (называемого также ураганом, тропическим ураганом, тайфуном и пр.) значительно меньше — всего несколько сот километров, высота его — до 12—15 *км*. Давление в ураганах *падает намного ниже*, чем во внетропическом циклоне. При этом скорость ветра достигает 400—600 *км/час*.

Самые большие скорости ветра в урагане наблюдаются вокруг так называемого «глаза бури» — зоны покоя в центральной части урагана. Черное пятно правильной формы на рисунке 3 — это и есть глаз бури. Выразительное описание глаза урагана дает очевидец, пролетевший через тайфун на самолете метеослужбы — французский журналист П. А. Молэн, автор книги «Охотники за тайфунами».

«Мы летим на высоте 3 *км* в колодце диаметром 22 *км*, в котором плавает несколько перистых облаков, мирных, как игрушки. Стены этого колодца представляет недвижимая буря, удерживаемая таинственной причиной. *Она наполнена кипящими* облаками, охваченными жесточайшими конвульсиями. Когда самолет кренится на виражах, глаза поднимаются к верхушке стены, выходу из этого колодца в 15 *км* над нами. И перед нашим удивленным взором развертываются эти кипящие стены, эта гигантская бездна, это крупное отверстие, которое и *заставило назвать все* явление «глазом тайфуна»».

Заметим, что внетропические циклоны «глазом» не обладают.

Еще четче зона покоя (полость) выражена у мелкомасштабных вихрей — смерчей (торнадо, тромбов) (рис. 4). Размеры их очень малы: ширина — от нескольких метров до 2—3 *км*, в среднем 200—400 *м*, высота от нескольких десятков до 1500—2000 *м*, в среднем несколько сот метров. Скорость ветра в смерче иногда превышает звуковую (1200 *км/час*!).

В сердцевине смерча давление падает очень низко, поэтому смерчи

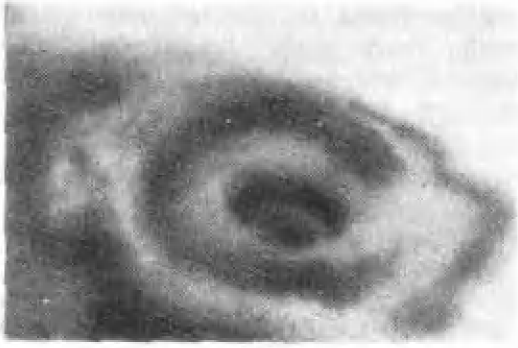


Рис. 5.

Рис. 6.

«всасывают» в себя различные, иногда очень тяжелые предметы, которые переносят затем на большие расстояния. Люди, оказавшиеся в центре смерча, погибали. Поэтому нет наблюдений его полости изнутри. Но ее видели снизу, когда смерч проходил над головой наблюдателя. Рисунок 5 представляет собой фотографию внутренней полости смерча, снятую снизу.

Рис. 7.

По рассказам очевидцев полость смерча похожа на внутренность черного пустого цилиндра, освещенного изнутри блеском молний, проскакивающих между стенами. В некоторых случаях наблюдатели молний не видели.

Однажды нижний край смерча прошел над головой наблюдателя на высоте 6 *м*. Ширина внутренней полости этого смерча была около 130 *м*, тогда как толщина стенки — всего 3 *м*. В середине полости находилось яркое, светящееся голубым светом прозрачное облако. Немного позже, когда смерч уже прошел над наблюдателем, конец его спустился к земле, коснулся соседнего дома и в одно мгновение унес его. Дом распался в воздухе.

Со стороны смерч напоминает столб (рис. 6), воронку (рис. 7) или хобот (рис. 4), свешивающийся из основания мощного грозового облака. Может образоваться сразу группа смерчей (рис. 8). Интересна зарисовка смерча с двумя воронками (рис. 9). В черной туче скрыта горизонтальная часть смерча — вихревое образование, вращающееся вокруг оси, вытянутой параллельно поверхности Земли. Эту часть смерча видел летчик, пролетавший на высоте около 300 *м*. По его словам, она напоминала огром-

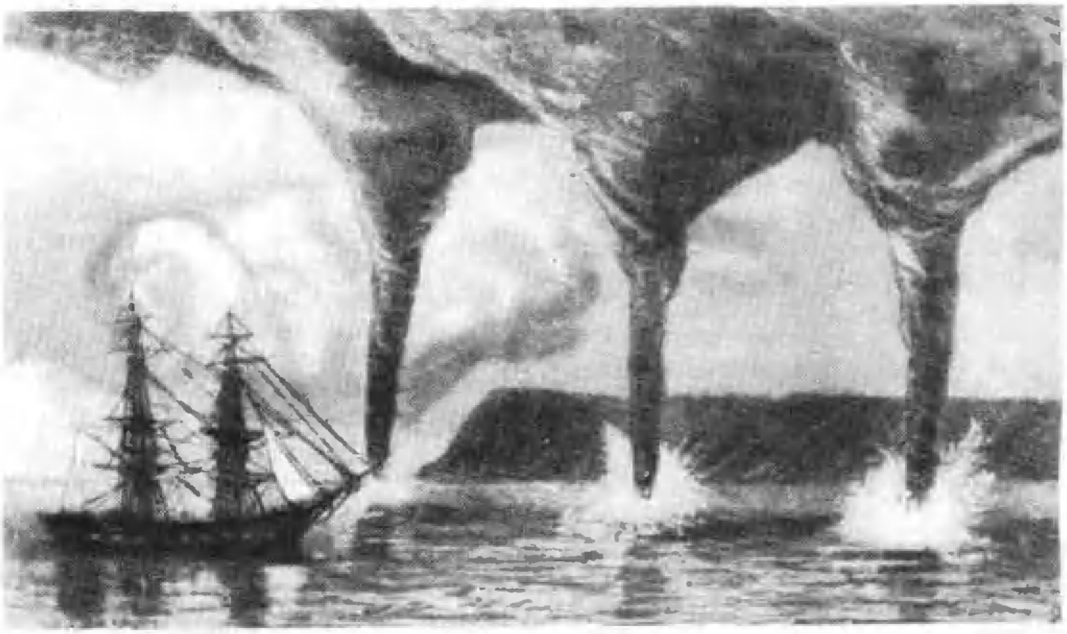


Рис. 8. Зарисовка водяных смерчей 1840 г. в Средиземном море у берегов Алжира.

ную извивающуюся змею. Подобную «змею», переходившую в смерч, наблюдали однажды с Земли. «Змея» была наполнена водой, которую смерч высасывал из озера. Похоже, что горизонтальная часть смерча связана с громадным вихревым кольцом, образующимся иногда в облаках. Появляется она раньше самого смерча.

Смерчи обыкновенно возникают в районах, где соприкасаются воздушные массы с резко отличными тепловыми свойствами, в области мощных вертикальных движений и сходящихся потоков.

Накоплен огромный фактический материал о физических свойствах смерчей (см. книгу Д. В. Наливкина «Ураганы, бури и смерчи»). Например, известно о фантастически больших перепадах скорости ветра в смерче.

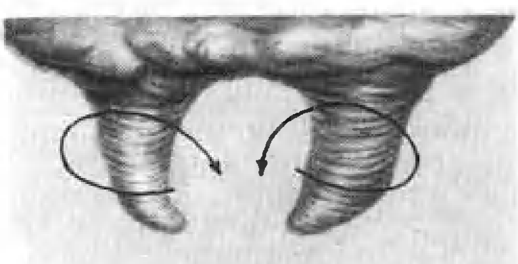


Рис. 9. Зарисовка смерча 1879 г. в Канзасе (США).

Казалось бы, действие сил вязкости (внутреннего трения) должно сглаживать резкость картины. Однако приведем такой пример.

Смерчи часто наблюдаются в равнинных штатах Северной Америки. Проходя через фермы, они разрушают строения, в частности, курятники, разбрасывая их обломки далеко по равнине. На большом расстоянии от фермы находят куски разорванных куриных тушек. Бывали случаи, когда стены и крыши курятника исчезали, а куры оставались на месте, живые или мертвые. Часть кур находят ощипанными: смерч всасывает в себя перья. Возможно, этому помогает следующее обстоятельство: в коже курицы у основания перьев находятся воздушные мешочки, которые могут взрываться, если давление окружающего воздуха упадет достаточно низко. Так или иначе, потерять перья курица может только в том случае, если она находилась в воронке смерча. Но однажды нашли курицу, у которой перья были ощипаны только на одной половине тела. Это значит, что скорость ветра менялась на расстоянии нескольких сантиметров от «ощипывающей» до близкой к нулю.

Удивительна способность смерчей втыкать продолговатые предметы (со-

Рис. 10.

ломинки, палки и др.) в деревья, стены домов, землю и т. п. Мелкие камни пробивают стекло подобно пулям, выпущенным из револьвера.

Зарегистрирован случай, когда во время прохождения смерча сосновая палка пробила лист железа толщиной около сантиметра. Этим же качеством обладают ураганы. На рисунке 10 мы видим палку, проткнувшую ствол пальмы. По-видимому, эта способность также связана с резкими перепадами скорости в вихре.

В последние десятилетия крупные вихри исследовались со специальных самолетов метеослужбы. Радиолокаторы и метеоспутники позволили получить «изображения» глобальных ветровых систем. Особенно четкими получаются фотографии циклонов, поскольку они сопровождаются сильной облачностью и осадками. Как показывают фотографии, осадки в циклонах концентрируются в четко выделяющиеся спиральные полосы. Антициклон прозрачен, осадки в нем редки, а если они и выпадают, то обычно на периферии в виде мороси. Поэтому антициклоны значительно труднее различить на спутниковых фотографиях.

И все-таки, несмотря на обилие фактического материала, последовательной теории вихрей еще нет. Связано это, прежде всего, с тем, что в каждом конкретном случае зарождения вихря его развитие определяется огромным множеством внешних факторов. Неясно, какое именно сочетание известных условий вызовет первоначальное развитие вихря. В самом деле, до стадий урагана развиваются менее 10% образовавшихся в тропиках областей пониженного давления, остальные бесследно исчезают. Пока нельзя предсказать развитие урагана или смерча в данной конкретной ситуации.

Особенно плохо разработана теория смерчей. И дело здесь не только в том, что возникают они неожиданно и при более разнообразных условиях, чем ураганы (так, смерчи иногда образуются в глубине материка). Огромная скорость ветра в смерчах мешает их экспериментальному изучению. Это же обстоятельство не позволяет сколько-нибудь последовательно изучить это явление математически.

В самом деле, даже на самый «грубый» вопрос — в какую сторону будет вращаться смерч — нельзя ответить однозначно. При громадной скорости движения внутри мелкомасштабного вихря периодический процесс суточного вращения Земли может оказаться слишком медленным, чтобы активно взаимодействовать с процессом быстрого внутреннего движения, и развитие такого мелкомасштабного вихря будет определяться только конкретными внутренними условиями в газе. Они же будут определять направление вращения вихря. Поэтому, если большие вихри Северного полушария — внетропические циклоны и ураганы — вращаются против часовой стрелки, то для смерчей того же полушария не исключается вращение по часовой стрелке.

Возможны случаи одновременного появления двух или более вихрей в одном и том же районе. Оказавшись на достаточно близком расстоянии друг от друга, такие вихри начинают взаимодействовать между собой. Это явление называется эффектом Фудзивары.

Попробуем схематично описать «встречу» двух вихрей. У каждого одиночного вихря область интенсивного вращения отделена от неподвижной зоны так называемой периферической областью, в которой скорость постепенно спадает до нуля. Представим себе, что два урагана оказались на таком расстоянии, что центр каждого их них попал в периферическую область другого. Пусть, для определенности, ураганы вращаются против часовой стрелки. Каждый из них приведет в движение центр своего «собрата» таким образом, чтобы тот вращался относительно него против часовой стрелки. Как легко увидеть, это приведет к вращению центров обоих ураганов также против часовой стрелки относительно некоторой точки, расположенной на отрезке прямой, соединяющей центры ураганов, ближе к более мощному вихрю. В нижних слоях атмосферы воздух притекает к центру урагана, тогда как наверху оттекает от центра. В зависимости от интенсивности этих процессов у данной конкретной пары ураганов они могут сближаться, если преобладает «всасывание», или отступать друг от друга, если сильнее проявят себя оттекающие потоки в верхних слоях.

При этом ураганы все время продолжают влиять друг на друга. По выражению американского физика К. Орра, движение их напоминает поведение боксеров на ринге, выжидающих момент для нанесения решающего удара.

Аналогичная схема позволяет рассматривать встречу антициклонов и пары циклон—антициклон. Кроме того, ее можно распространить на случай, когда вихрь попадает в мощное воздушное течение и начинает взаимодействовать с ним.

Развитие вихря определяют многие факторы, и сделать заранее какие-либо предположения о результате «встречи» двух вихрей практически невозможно.

Путь уже развившегося урагана иногда оказывается очень длинным, и, проходя его, вихрь испытывает различные превращения. При выходе из тропиков ураган принимает форму сильного внетропического циклона. Штормовые циклоны Западной Европы часто оказываются бывшими тропическими ураганами, которые прошли вдоль берегов Северной Америки и пересекли Атлантику. Некоторые из них, пройдя по Европе, уходят затем в Азию.

Когда ураган выходит на сушу, то из-за «шероховатости» земной поверхности его нижние слои начинают разрушаться. Кроме того, проходя над сушей, ураган слабеет из-за недостатка «питания» — влаги. Но если ураган оказывается вновь над океаном, то сохранившаяся его верхняя часть может «раскрутить механизм» с прежней силой.

Обрушиваясь на густонаселенные районы суши, ураган уносит тысячи человеческих жизней и причиняет огромный материальный ущерб. Энергия его громадна: за один день большой ураган «расходует» энергию, равную энергии взрыва 13 000 мегатонных ядерных бомб; кинетическая энергия среднего урагана равна запасу энергии 1000 атомных бомб.

Деятельность ураганов меняет рельеф земной поверхности: исчезают коралловые острова, «передвигаются» берега океана, появляются новые проливы и т. п.

Прогнозы перемещений циклонов и антициклонов за последние два десятилетия стали намного надежнее благодаря использованию ЭВМ и информации, доставляемой спутниками, радиолокаторами и самолетами. На помощь службе погоды приходят новые совершенные аппараты и приборы. Служба эта ведется постоянно.

О. Жаутыков

Кривые второго порядка

Кривой второго порядка называют график уравнения второй степени с двумя неизвестными

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (1)$$

где $A, B, C, D, E, F \in \mathbf{R}$. Обозначим многочлен в левой части уравнения (1) через $f(x, y)$. Тогда точка $M(x_0; y_0)$ принадлежит графику уравнения (1), если $f(x_0, y_0) = 0$ (см. «Алгебра 6», п. 54).

Основная наша задача — научиться определять вид этого графика по коэффициентам A, B, C, D, E, F.

Будем считать, что A, B, C не обращаются одновременно в нуль (если $A=B=C=0$, то получается кривая первого порядка — график линейного уравнения $Dx+Ey+F=0$).

Мы изберем следующий план: сначала изучим несколько простых частных случаев — когда некоторые коэффициенты уравнения (1) обращаются в нуль, а потом научимся параллельными переносами и поворотами получать график уравнения (1) из этих частных случаев.

Частные случаи

Случаи эти таковы (все коэффициенты при выписываемых членах, кроме, быть может, F, отличны от нуля):

$$Ax^2 + Ey = 0, \qquad (2а)$$

$$Cy^2 + Dx = 0, \qquad (2б)$$

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0, \qquad (3)$$

$$Ax^2 + F = 0, \qquad (4а)$$

$$Cy^2 + F = 0. \qquad (4б)$$

П а р а б о л ы. Перепишем уравнения (2а) и (2б) так:

$$y = \frac{-A}{E} x^2, \qquad (5а)$$

$$x = \frac{-C}{D} y^2. \qquad (5б)$$

Графиком уравнения (5а) является парабола (см. «Алгебра 6», п. 24 и статью И. Н. Бронштейна «Парабола» в «Кванте», 1975, № 4). Легко понять, что уравнение (5б) тоже определяет параболу — она получается при отражении параболы $y = -\frac{C}{D} x^2$ относительно биссектрисы первого координатного угла (см. рис. 1).

О к р у ж н о с т ь, э л л и п с, г и п е р б о л а, н а ч а л о к о о р д и н а т, п а р а п р я м ы х и л и п у с т о е м н о ж е с т в о. Все это может быть графиком уравнения (3).

Действительно, если $A=C$ ($\neq 0$), то уравнение (3) можно переписать в виде

$$x^2 + y^2 = \frac{-F}{A}. \qquad (6а)$$

Если $-F/A>0$, то уравнение (6а) задает окружность радиуса $\sqrt{-F/A}$ (рис. 2). Если $-F/A=0$, то уравнению (6а) удовлетворяет лишь пара $x=0$, $y=0$, и графиком является начало координат. Если же $-F/A<0$, то уравнение (6а) решений не имеет, его график — пустое множество.

Пусть теперь $A\neq C$. Тогда если A и C одного знака (то есть если $C/A>0$), то графиком уравнения (3), которое можно переписать в виде

$$x^2 + \frac{C}{A} y^2 = \frac{-F}{A}, \qquad (6б)$$

является эллипс, если $-F/A>0$ (см. рис. 3 и статью И. Н. Б р о н ш т е й н а «Эллипс» в «Кванте», 1975, № 1), начало координат, если $-F/A=0$, и пустое множество, если $-F/A<0$.

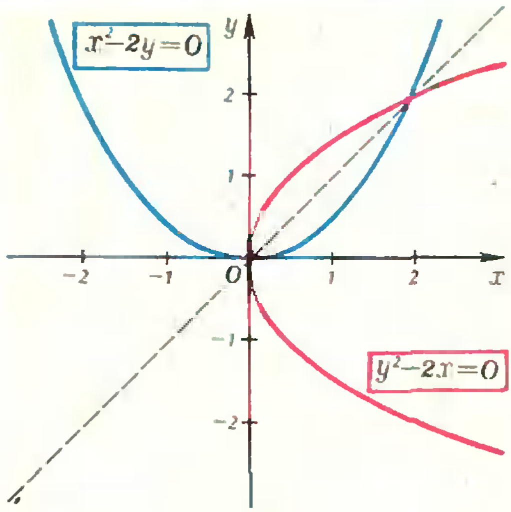


Рис. 1.

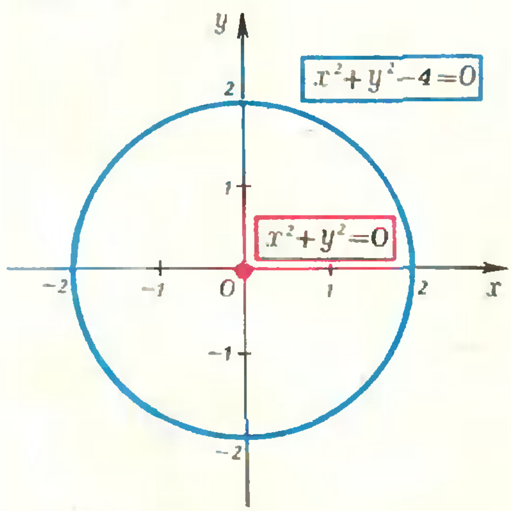


Рис. 2.

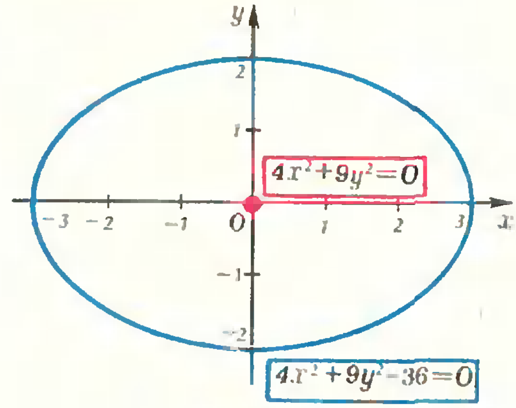


Рис. 3.

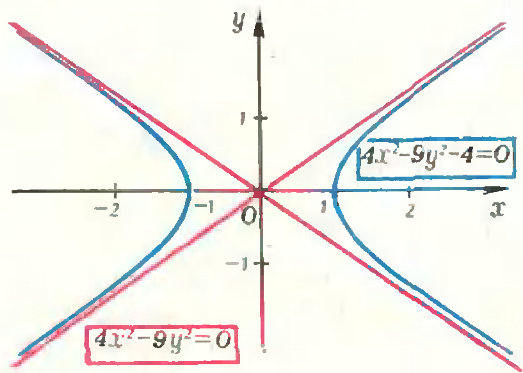


Рис. 4.

Если же A и C разных знаков (то есть если $C/A<0$), то уравнение (6б) при $F\neq 0$ определяет гиперболу (см. статью И. Н. Бронштейна «Гипербола» в «Кванте», 1975, № 3), а при $F=0$ — пару прямых (рис. 4)

$$x+\sqrt{\frac{-C}{A}}\,y=0,$$

$$x-\sqrt{\frac{-C}{A}}\,y=0$$

(см. «Алгебра 6», п. 21; эти уравнения легко привести к виду $y=kx$).

Прямые или пустое множество. В уравнениях (4а) и (4б) надо рассмотреть три случая: $F=0$, $F/A>0$ (или $F/C>0$) и $F/A<0$ (или $F/C<0$).

Если $F=0$, то (4а) превращается в уравнение $x=0$, график которого — ось Oy, а (4б) дает $y=0$ — это ось Ox.

Если числа F и A (или F и C) разных знаков, то уравнения (4) дают каждое пару прямых, параллельных оси Oy:

$$x=\pm\sqrt{\frac{-F}{A}}$$

или оси Ox

$$y=\pm\sqrt{\frac{-F}{C}}.$$

Если же числа F и A (или F и C) одного знака, то график уравнения (4а) (и (4б)) — пустое множество.

Перемещения

Это — преобразования, которые переводят фигуру в конгруэнтную ей фигуру. Стало быть, прямая в результате перемещения останется прямой, парабола — параболой, гипербола — гиперболой. А вот уравнения этих линий изменятся (но по-прежнему будут уравнениями второй степени), и этим можно воспользоваться для упрощения уравнения — скажем, подобрать перенос, после которого в уравнении исчезнет член Dx, или поворот, аннулирующий Bxy. Переносами и поворотами мы и ограничимся.

Параллельный перенос. Пусть при параллельном переносе $\vec{r}\,(a;\ b)$ точка $M\,(x;\ y)$ переходит в точку $M'\,(u;\ v)$. Тогда $x+a=u$, $y+b=v$ (рис. 5), поэтому

$$\begin{aligned} x &= u - a, \\ y &= v - b. \end{aligned} \qquad (7)$$

Если координаты точки M удовлетворяют уравнению $f\,(x,\ y)=0$, то координаты точки $M'\,(u;\ v)$ удовлетворяют уравнению

$$g\,(u,\ v) = f\,(u - a,\ v - b) = 0,$$

то есть при переносе $\vec{r}\,(a;\ b)$ график уравнения $f\,(x,\ y)=0$ отображается в график уравнения (в переменных x, y)

$$g\,(x,\ y) = f\,(x - a,\ y - b) = 0.$$

Обратный перенос $\vec{r}'(-a;\ -b)$ отображает график уравнения $g\,(x,\ y)=0$ в график уравнения $f\,(x,\ y)=0$.

В учебнике «Алгебра и начала анализа 10» (п. 9*) доказывается, что при переносе $\vec{r}\,(a;\ b)$ график функции $y=f\,(x)$ отображается в график функции $y=f\,(x-a)+b$. Этот факт легко получается из доказанного нами свойства переносов (при этом выясняется, почему a входит в последнюю формулу со знаком «минус», а b — со знаком «плюс»). График функции $y=f\,(x)$ совпадает с графиком уравнения $g\,(x,\ y)\ =\ y-f\,(x)=0$. При переносе $\vec{r}\,(a;\ b)$ из графика уравнения $g\,(x,\ y)=0$ получается график уравнения $g\,(x-a,\ \ y-b)=0$, то есть уравнения $(y-b)-f\,(x-a)=0$, или функции $y=f\,(x-a)+b$.

Повороты. Рассмотрим поворот с центром $O\,(0;\ 0)$ на угол β в

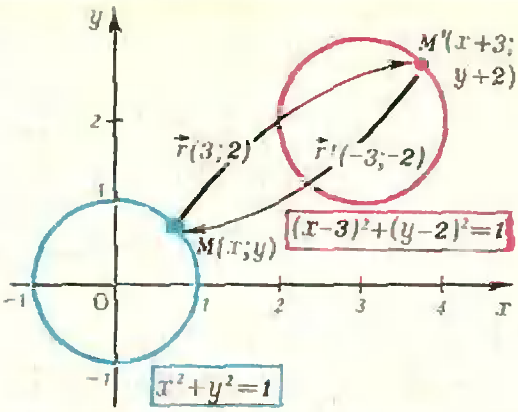


Рис. 5.

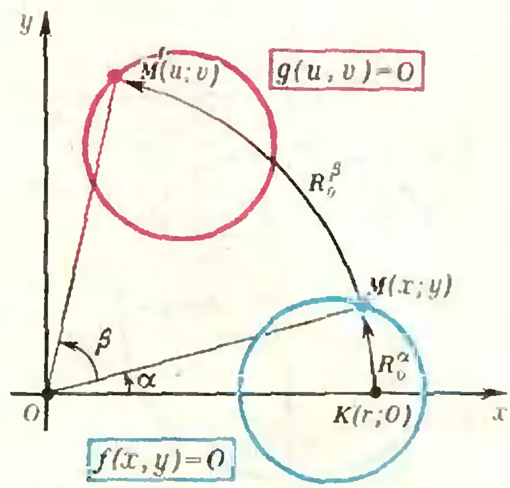


Рис. 6.

положительном направлении (против часовой стрелки). При таком повороте R_O^β точка $M\,(x;\ y)$ отобразится в точку $M'(u;\ v)$. Попробуем связать u, v и x, y. Пусть $|OM|=r$ и точка $M\,(x;\ y)$ получается из точки $K\,(r;\ 0)$ на оси Ox поворотом на угол α (рис. 6). Тогда (см. «Алгебра и начала анализа 9», §14, п. 70, 71) $x=r\cos\alpha$, $y=r\sin\alpha$. Но точка $M'(u;\ v)$ получается из точки $K\,(r;\ 0)$ поворотом на угол $\alpha+\beta$, поэтому $u=r\cos\,(\alpha+\beta)$, $v=r\sin\,(\alpha+\beta)$. Поскольку

$$\cos\,(\alpha+\beta) = \\ = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\sin\,(\alpha+\beta) = \\ = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

мы получаем:

$$u = r\cos(\alpha+\beta) = x\cos\beta - y\sin\beta,$$

$$v = r\sin(\alpha+\beta) = x\sin\beta + y\cos\beta.$$

При обратном повороте $R_O^{-\beta}$ точка $M'(u;\ v)$ отображается в точку $M(x;\ y)$, поэтому

$$x = u\cos(-\beta) - v\sin(-\beta) = u\cos\beta + v\sin\beta,$$

$$y = u\sin(-\beta) + v\cos(-\beta) = -u\sin\beta + v\cos\beta. \quad (8)$$

Если координаты точки $M(x;y)$ удовлетворяют уравнению $f(x,\ y)=0$, то координаты точки $M'(u;\ v)$ должны удовлетворять уравнению

$$g(u,\ v) = f(u\cos\beta + v\sin\beta,\ -u\sin\beta + v\cos\beta) = 0,$$

то есть при повороте R_O^{β} график уравнения $f(x,y)=0$ отображается в график уравнения (в переменных $x,\ y$)

$$g(x,\ y) = f(x\cos\beta + y\sin\beta,\ -x\sin\beta + y\cos\beta) = 0.$$

Упрощение уравнения $f(x,\ y)=0$

Вернемся к общему уравнению (1) кривой второго порядка

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Попробуем поворотом избавиться от члена Bxy. Подставляя в уравнение $f(x,\ y)=0$ выражения $x,\ y$ через $u,\ v$ (формулы (8)), мы получим некоторое уравнение $g(u,\ v)=0$ второй степени. Выписывая члены, содержащие лишь uv, найдем B' — новое значение коэффициента при произведении uv:

$$B' = (A-C)\,2\sin\beta\cos\beta + B(\cos^2\beta - \sin^2\beta).$$

Приравняем его к нулю:

$$(A-C)\sin 2\beta + B\cos 2\beta = 0$$

и найдем β:

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{B}{C-A} \text{ при } A\neq C,$$

$$\cos 2\beta = 0\ (\beta = 45^\circ) \text{ при } A = C.$$

Итак, поворотом всегда можно избавиться от члена Bxy, то есть привести уравнение (1) к виду

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (9)$$

Пример. Пусть дано уравнение

$$7x^2 + 6\sqrt{3}\,xy + 13y^2 + 4(\sqrt{3}-8)x - 4(8\sqrt{3}+1)y + 4 = 0. \quad (10)$$

Здесь $A=7$, $B=6\sqrt{3}$, $C=13$, поэтому $\operatorname{tg} 2\beta = \sqrt{3}$, $\beta = 30^\circ$. Подставляя (по формулам (8)) в уравнение (10)

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}u + \frac{1}{2}v,$$

$$y = -\frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v,$$

получаем (проверьте!) уравнение

$$4u^2 + 16v^2 + 8u - 64v + 4 = 0.$$

Значит, график уравнения (10) получается из графика уравнения

$$4x^2 + 16y^2 + 8x - 64y + 4 = 0 \quad (11)$$

поворотом $R_O^{-30^\circ}$.

Теперь воспользуемся переносами и попробуем свести уравнение (9) к еще более простому — без членов Dx и Ey. При переносе $\vec{r}(a;\ b)$ график уравнения $f(x,\ y)=0$ переходит в график уравнения $g(x,\ y)=0$, где $g(x,\ y)=f(x-a,\ y-b)$, то есть уравнение (9) переходит в такое:

$$A(x-a)^2 + C(y-b)^2 + D(x-a) + E(y-b) + F = 0.$$

Раскрывая скобки и упрощая, получаем:

$$Ax^2 + Cy^2 + (D-2aA)x + (E-2bC)y + Aa^2 + Cb^2 - aD - bE + F = 0.$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при $x,\ y$, приходим к уравнениям относительно a и b:

$$D - 2aA = 0,\quad E - 2bC = 0,$$

откуда $a = \frac{D}{2A}$ (при $A\neq 0$), $b = \frac{E}{2C}$ (при $C\neq 0$).

Пример (продолжение). В уравнении (11) $A=4$, $C=16$, $D=8$, $E=-64$, $F=4$, поэтому $a=1$, $b=-2$, и перенос $\vec{r}(1;\ -2)$ переводит график уравнения (11) в график уравнения

$$4x^2 + 16y^2 - 64 = 0,$$

или

$$x^2 + 4y^2 - 16 = 0.$$

А это — уравнение вида (3), оно задает эллипс

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1.$$

Поэтому график уравнения (10) является эллипсом и получается из найденного нами эллипса переносом $\vec{r}(-1;\ 2)$ и затем поворотом $R_O^{-30°}$.

Итак, если $A \neq 0$ и $B \neq 0$, то можно избавиться от членов Dx и Ey. Если же $A=0$ (или $C=0$), то член Dx (или Ey) останется, но тогда если $D \neq 0$ (или $E \neq 0$), то можно аннулировать F переносом $\vec{r}\left(\frac{F}{D};\ 0\right)$ $\left(\text{или } \vec{r}\left(0;\ \frac{F}{E}\right)\right)$.

Таким образом, мы научились сводить уравнение $f(x,\ y)=0$ второй степени к одному из следующих видов:

вид уравнения (9)	результат переноса
$A \neq 0,\ B \neq 0$	$Ax^2+By^2+F=0$
$A \neq 0,\ B=0,\ E \neq 0$	$Ax^2+Ey=0$
$A \neq 0,\ B=0,\ E=0$	$Ax^2+F=0$
$A=0,\ B \neq 0,\ D \neq 0$	$By^2+Dx=0$
$A=0,\ B \neq 0,\ D=0$	$By^2+F=0$

А все написанные справа уравнения нами разобраны — это и есть частные случаи уравнения (1) (формулы (2) — (4)). Таким образом, мы решили поставленную задачу.

Заметим еще, что уравнение (2б) можно привести к виду (2а), а уравнение (4б) — к виду (4а). Для этого надо произвести поворот $R_O^{90°}$, при котором график уравнения $f(x,\ y)=0$ отображается в график уравнения $f(y,\ -x)=0$. Попробуйте это доказать, а также решить следующие задачи.

Упражнения

Построить графики следующих уравнений:

1. $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$;
2. $4x^2-4xy+y^2-16x+6y+22=0$;
3. $x^2-4xy+y^2+4\sqrt{2}\,x-$
$$-2\sqrt{2}\,y+11=0.$$

Задачи «Последние цифры»

1. Пусть число a не делится ни на 2, ни на 5.

Доказать, что при возведении числа $A=a^{5\cdot 10^{n-2}}$ в натуральную степень последние его n цифр не изменятся ($n \geq 4$, $a \in \mathbf{N}$).

2. Пусть число b не делится на 2, но делится на 5.

а) Доказать, что при возведении числа $B=b^{2^{n-1}}$ ($n \in \mathbf{N}$) в натуральную степень последние его n цифр не изменятся.

б) Пусть $r,\ q,\ n \in \mathbf{N}$, $r \geq n$. Доказать, что последние n цифр выражений $b^{2^{n-1}q+r}$ и b^r соответственно равны.

3. Пусть число c делится на 2, но не делится на 5.

а) Доказать, что при возведении числа $C=c^{4\cdot 5^{n-1}}$ в натуральную степень последние его n цифр не изменятся.

б) Пусть $r,\ q,\ n \in \mathbf{N}$, $r \geq n$. Доказать, что последние n цифр выражений $c^{4\cdot 5^{n-1}q+r}$ и b^r соответственно равны.

4. Пусть $m \in \mathbf{N}$. Доказать, что при возведении числа $M=m^{10^{n+1}}$ в натуральную степень последние его n цифр не изменятся.

5. Найдите три последние цифры выражения $3^{105}+4^{105}$.

6. Докажите, что разность $3^{999}-2^{999}$ оканчивается цифрами 1979.

7. Докажите, что если выражение

$$11^{10^{9^{8^{7}}}}-6^{5^{4^{3^{2}}}}$$

возвести в любую натуральную степень, то более 200 000 его последних цифр не изменятся.

8. Докажите, что при любом натуральном n разность

$$n^{n^{n^{n^{n}}}}-n^{n^{n^{n}}}$$

делится на сто.

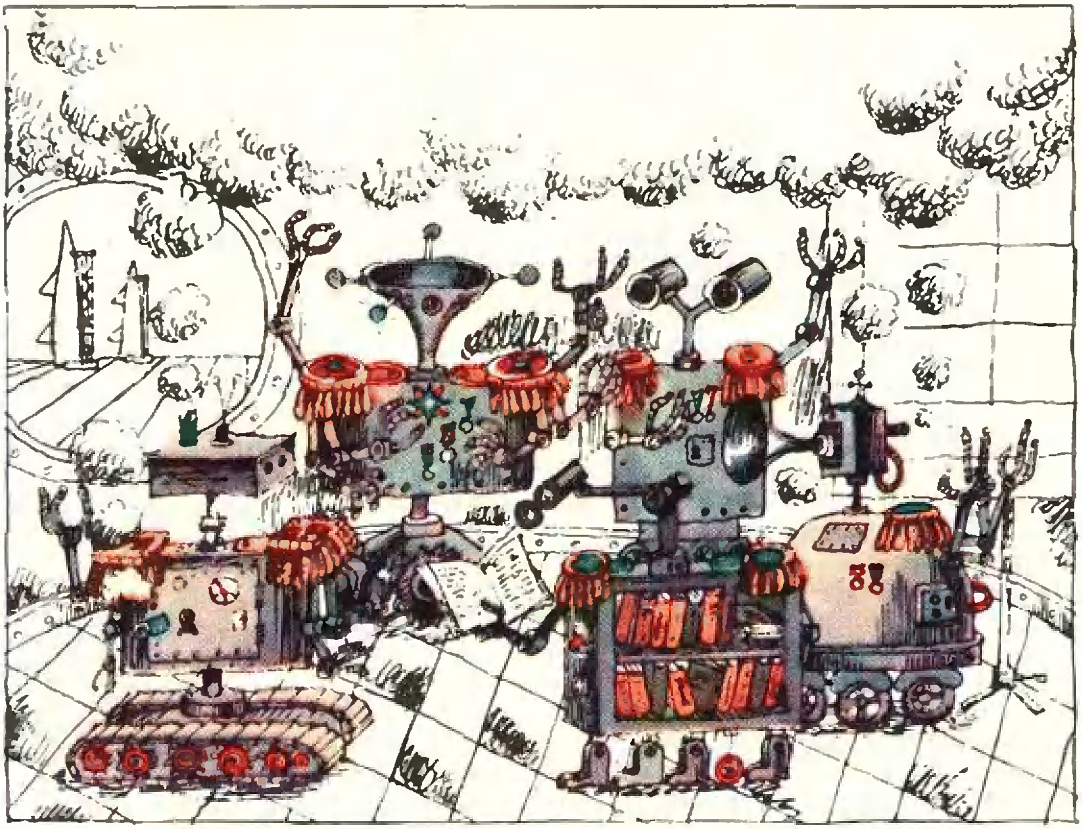
9. Найдите семь последних цифр числа

$$9999^{999^{99^{9}}}$$

10. В книге М. Гарднера «Математические новеллы» (М., «Мир», 1974) на странице 349 приведены 3376 цифр двадцать третьего числа Мерсенна $2^{11213}-1$, отпечатанного ЭВМ Университета штата Иллинойс. Последние его десять цифр таковы: 7696398191. «Математический факультет университета был так горд открытием 23-го числа Мерсенна, что ставил на конвертах специальный штемпель, извещающий об этом событии», — сказано в книге. Однако четвертая от конца цифра выдана неверно. Докажите, что это число должно кончаться цифрами 2191, а не 8191.

Примечание. Эти задачи связаны с автоморфными числами (см. «Квант», 1971, № 10, с. 39; 1973, № 1, с. 33 и 1973, № 7, с. 55).

М. Штеренберг



З. Тьмеладзе

Теория игр

Верда или Калимна?

Еще никогда за все сто гартов Великой Войны при штабе сиреневых не совещались так долго. Пары окиси молибдена клубились над группой генералов, ожесточенно споривших у доски со следующей таблицей:

ПОТЕРИ ДРОКЕРОВ		
Наша стратегия \ Стратегия фиолетовых	Атака на Калимну	Обстрел Верды
Защита Верды	6	3
Защита Калимны	1	5

Генералиссимус Дор покосился на табличку «Здесь молибден не окисляют», но не стал взывать к ней, а лишь молча кивнул Мотсу, предоставляя ему слово.

— У фиолетовых может быть только два плана: или звездолетная атака на Калимну, или обстрел... — генерал Мотс закашлялся («угробит его в конце *концов это пристрастие* к молибдену», — подумал Дор, но Мотс уже продолжал) — ... или обстрел Верды. По моему мнению, мы должны все силы бросить на оборону Верды. Тогда, если противник атакует ее, мы потеряем лишь три боевых дрокера.

— А если фиолетовые сунутся на Калимну? — нетерпеливо вмешался Луд. — Тогда не сдобровать шести нашим дрокерам.

Он самодовольно забросил в себя очередную порцию молибдена и продолжал:

— Калимна — вот наша главная опора. Все силы на ее защиту! Тогда атака на Калимну принесет фиолетовым в добычу всего один дрокер.

— А Верда? — подавился возмущением Мотс. — Мы потеряем там пять дрокеров!

— Потише, генералы, — бесцеремонно прервал их Дор. — Попробуем разобраться. Наша задача — потерять как можно меньше дрокеров, — Дор еще раз посмотрел на таблицу с вариантами, — но все зависит от того, какой план изберет противник. А что говорит разведка?

Нахит неохотно ответил:

— У нас пока еще нет точных данных. Но, надо думать, противник тоже колеблется. Иначе говоря, мы можем считать, что вероятность принятия противником каждого плана равна $^1/_2$. Не беспокойтесь, господа, я так же, как и вы, не знаком с теорией вероятностей. Из всей этой мудреной науки я знаю лишь, что вероятность $^1/_2$ означает один шанс из двух, да еще правило для исчисления ожидаемых потерь. К примеру, если вероятность нападения на Калимну составляет $^1/_2$, а наши потери в результате такого нападения будут равны шести дрокерам, то ожидаемые потери в Калимне составят $6\times\frac{1}{2}=3$. А если бы, скажем, вероятность нападения составляла $^1/_3$, то это означало бы ожидаемые потери $6\times\frac{1}{3}=2$. Этого достаточно, чтобы подсчитать ожидаемые потери в каждом из двух наших возможных планов:

Стратегия	Ожидаемые потери дрокеров		
	в Калимне	в Верде	Итого
Защита Верды	$6\times\frac{1}{2}=3$	$3\times\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$
Защита Калимны	$1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$	$5\times\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}$	3

Вы видите, что при защите Калимны мы потеряем на целых полтора дрокера меньше.

— Недурная осведомленность для начальника разведки, — съязвил Луд, снова закладывая в себя молибден.

—А почему вы решили, что вероятности нападений на Верду и Калимну равны? Мне так не кажется. По-моему, фиолетовые скорее всего ринутся на Верду. Ведь они уже один раз ее брали. И если они атакуют Калимну в одном случае из четырех, то есть с вероятностью $^1/_4$, а Верду — с вероятностью $^3/_4$, то ваши расчеты приведут совсем к другому выводу:

Стратегия	Ожидаемые потери дрокеров		
	в Калимне	в Верде	Итого
Защита Верды	$6\times\frac{1}{4}=1\frac{1}{2}$	$3\times\frac{3}{4}=2\frac{1}{4}$	$3\frac{3}{4}$
Защита Калимны	$1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$	$5\times\frac{3}{4}=3\frac{3}{4}$	4

Разве не ясно, что нам выгоднее защищать Верду?

— Лично мне не ясно, — возразил Дор. — Эти расчеты были бы оправданы, если бы можно было както обосновать оценки шансов нападения на Верду и Калимну. Но пока это одни догадки. А строить рассуждения на догадках — это вредная привычка, вроде окисления молибдена. И нам пора от нее избавляться.

Генералы скучно переглянулись — Дор один среди них пренебрегал молибденом.

— Нельзя ли принять правильный план, не делая заранее предположений о шансах принятия противником того или иного плана? Что думаете вы, Рол, как ведущий военный теоретик?

— Я читал в «Межпланетном вестнике», что где-то на далекой планете построили теорию, позволяющую это сделать. Давайте предположим, что нам нужно использовать не один план, а оба, с неизвестными пока вероятностями p_1 и p_2. Если, скажем, $p_1 = 0{,}2$, а $p_2 = 0{,}8$, то в двух случаях из десяти нужно защищать Верду, а в восьми — Калимну. Иначе говоря, давайте ответим на неопределенность случайностью.

— Мы не можем ставить судьбы сиреневых в зависимость от случайности, — просипел Мотс. — Ведь речь идет ... кхе-кхе... не о результате матча в брастул, а о судьбе государства, и...

— Продолжайте, Рол. Мне кажется, в ваших словах есть нечто интересное, — вмешался рассудительный Дор.

— Теперь нам нужно найти эти вероятности p_1 и p_2. Разумеется, сумма их должна быть равна единице — ведь какое-то решение нам так или иначе придется принять:

$$p_1 + p_2 = 1. \qquad (1)$$

— Интересно, как это вам удастся найти два неизвестных из одного уравнения, — не успокаивался Луд.

— Давайте теперь потребуем, чтобы в любом случае среднее число потерянных дрокеров не превысило величины v, пока еще неизвестной, — продолжал Рол.

— Третье неизвестное! — с возмущением заметил Луд, но Рол увлеченно продолжал, не обращая внимания ни на Луда, ни на других генералов.

— Допустим, что фиолетовые нападут на Калимну. Если бы мы приняли план защиты Верды, то потеряли бы 6 дрокеров, но поскольку мы защищаем Верду лишь с вероятностью p_1, то и потеряем на этом $6p_1$ дрокеров. С вероятностью p_2 мы защищаем Калимну, и это приведет к потере $1 \times p_2 = p_2$ дрокеров. Итого в результате нападения противника на Калимну мы потеряем $6p_1 + p_2$ дрокеров. Чтобы потери не превысили величины v, должно выполняться неравенство

$$6p_1 + p_2 \leqslant v. \qquad (2)$$

— Но противник может напасть и на Верду, — напомнил Нахит.

— Да, и это дает нам еще такое неравенство:

$$3p_1 + 5p_2 \leqslant v. \qquad (3)$$

Мне, как, надеюсь, и вам всем, хотелось бы, чтобы величина v была поменьше. Однако она все же будет положительной: $v > 0$, — поскольку какое-то количество дрокеров нам придется потерять. Обозначим $x_1 = p_1/v$, $x_2 = p_2/v$, $L = 1/v$. Тогда неравенства (2) и (3), условия неотрицательности p_1 и p_2 и уравнение (1) запишутся так:

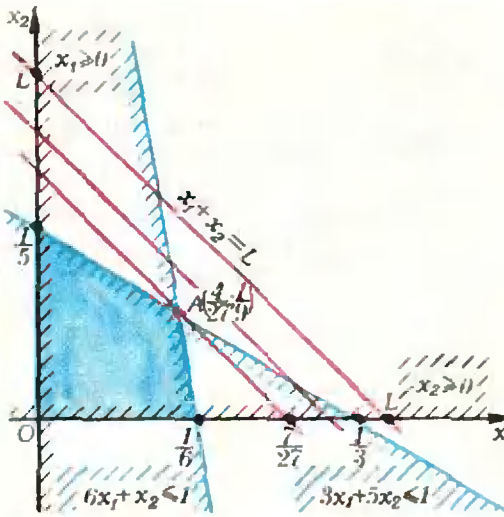


Рис. 1.

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 \leqslant 1, \\ 3x_1 + 5x_2 \leqslant 1, \\ x_1 \geqslant 0, \\ x_2 \geqslant 0, \\ L(x_1, x_2) = x_1 + x_2. \end{cases} \qquad (4)$$

Нас интересует наименьшее значение v, поэтому L должно быть наибольшим. Задача отыскания из системы (4) x_1 и x_2, при которых функция $L(x_1, x_2)$ принимает наибольшее возможное значение, называется жителями той далекой планеты *задачей линейного программирования* *). При двух неизвестных x_1 и x_2 эту задачу можно решать графически. Каждое из неравенств системы (4) задает на координатной плоскости x_1Ox_2 полуплоскость, пересечение этих полуплоскостей образует четырехугольник (см. рис. 1), а уравнение $L = x_1 + x_2$ задает прямую, пересекающую оси координат в точках $x_1 = L$ и $x_2 = L$. При разных L получаются параллельные прямые. Наибольшее L, при котором *прямая* $x_1 + x_2 = L$ пересекает четырехугольник (то есть система (4) имеет решение), соответствует точке A (4/27; 1/9) и дает $L = 4/27 + 1/9 = 7/27$, поэтому $v = 27/7 = 3\frac{6}{7}$, $p_1 = 4/7$, $p_2 = 3/7$. Таким образом, в четырех

*) См., например, статьи З. Я. Тьмеладзе «Физика и линейные неравенства» («Квант», 1975, № 10), Б. Алейникова, П. Бузыцкого, М. Дубсона «Симплекс-метод» («Квант», 1976, № 7).

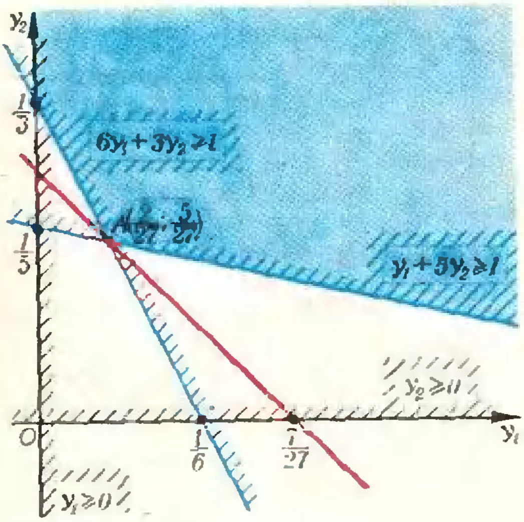


Рис. 2.

случаях из семи мы должны защищать Верду, а в трех — Калимму. И наши потери составят в среднем менее четырех дрокеров.

— Но заметьте, — вмешался Мотс из-за облачка паров молибдена, — раньше мы ожидали меньших потерь — только 3 или $3^{3}/_{4}$ дрокера.

— Неудивительно, — возразил Нахит. — Ведь нам пришлось что-то заплатить за недостающую информацию.

Но тут не выдержал Луд.

— По-моему, мы и так слишком много тратим на разведывательную службу, не получая взамен даже жалких крох информации о противнике.

Атмосфера снова начала накаляться, но вмешательство Дора не дало разрастись взаимным упрекам.

— Скажите, Рол, а как в этих условиях будет действовать противник? Есть ли у него оптимальная стратегия?

— Да, есть. Противник не знает наших планов, но ему известны последствия нападения на Верду и Калимму — его разведка обычно не подводит; поэтому он со своей стороны должен стараться нанести нам наибольший урон. Если обозначить наш урон через w, а вероятности нападения противника на Калимму и Верду через q_1 и q_2, то $q_1+q_2=1$, $6q_1+3q_2\geq w$, $q_1+5q_2\geq w$, $y_1=q_1/w$, $y_2=q_2/w$, $M=1/w$, и противник придет к следующей задаче линейного программирования:

$$\begin{cases} 6y_1+3y_2\geq 1, \\ y_1+5y_2\geq 1, \\ y_1\geq 0 \\ y_2\geq 0, \\ M(y_1,y_2)=y_1+y_2, \end{cases}$$

причем надо искать наименьшее значение M. Когда противнику удастся решить эту задачу линейного программирования, он получит: $y_1 = 2/27$, $y_2 = 5/27$, $M = 7/27$, откуда $q_1 = 2/7$, $q_2 = 5/7$, $w = 3^6/_7$ (рис. 2). То есть противник для достижения наибольшего урона нашим войскам в двух случаях из семи должен нападать на Верду, а в пяти — на Калимму. И его добыча будет равна тем же $3^6/_7$ дрокера. Разумеется, он должен нападать так, чтобы мы не знали определенно, какое нападение предстоит.

— Учитывая работу нашей разведки, — не удержался Луд, — это нетрудно.

— Скажите, Рол, — поинтересовался Дор, а что будет, если противник не станет следовать своей наилучшей стратегии?

— В «Межпланетном вестнике» пишут, что всякое уклонение от нее может привести лишь к уменьшению успехов.

Рол закончил свою речь жестом победителя, но у Дора она не имела успеха.

— Я вполне согласился бы с вами, Рол, если бы нам предстояло несколько столкновений с фиолетовыми. Но нас ждет лишь одна битва. Какое решение нам принять?

— Независимо от числа битв мы должны бросать своеобразный жребий. Если бы оптимальная стратегия имела вид $p_1=1/2$, $p_2=1/2$, то достаточно было бы бросить монетку, загадывая на куху и кору. Стратегию $p_1=4/7$, $p_2=3/7$ реализовать несколько труднее. Но можно. Например, так: 4/7 — это примерно 34/60, а 3/7 — это 26/60. Можно взглянуть на часы, и если секундная стрелка будет между 0 и 34 секундами, принять решение оборонять Верду, а если между 34 и 60 — Калимму. Я считаю, что так и нужно поступать, даже если битва всего одна.

— Я не согласен! — возразил Мотс, и по многим причинам. Так стоило бы действовать, если бы нам противостоял разумный противник, равный нам по интеллекту — например, бордовые. Но фиолетовые принадлежат к низшей категории... кхе-кхе... их можно рассматривать просто как силы природы. Подумать только! Вместо молибдена эти варвары употребляют висмут! Они никогда не додумаются...

Новый приступ кашля сломил Мотса, и он уже не мог продолжать. Срочно вызванный штабной врач занялся пациентом, и совещание пришлось на время прервать.

Первое возвращение на Землю

Участники военного конфликта на далекой планете использовали математическую теорию, хорошо известную у нас на Земле, — *теорию игр*. Ее применяют в тех случаях, когда нет информации о замыслах противника. Первоначально эта теория развивалась применительно к азартным играм, от чего и получила свое название. Но затем ее приложения стали весьма многообразными — от экономики до военного дела. Следует отметить, что исходные положения теории игр не бесспорны. И применима она, строго говоря, лишь тогда, когда игра повторяется достаточно много раз. Однако находятся сторонники ее применения и к однократным решениям (в их числе — генерал Рол).

В числе многих интересных проблем теории игр — проблема *смешанных стратегий*. Нередко информация, имеющаяся в распоряжении того, кто принимает решение, недостаточна. В этих условиях невозможно указать какую-то одну безусловно лучшую стратегию, и приходится прибегать к использованию смешанной стратегии — с некоторыми вероятностями применять несколько вариантов, как предложил впервые французский математик Эмиль Борель (1871—1956). Впоследствии для отыскания оптимальных смешанных стратегий стали применять линейное программирование.

Смешанные стратегии нуждаются в *датчике случайных чисел* (простейшие варианты таких датчиков — монета, часы с секундной стрелкой; разумеется, существуют и более совершенные датчики случайных чисел, реализуемые на ЭВМ). Если смешанная стратегия не будет доставляться датчиком случайных чисел, а будет назначаться, есть опасность, что противник отгадает, какой вариант его ждет, и получит возможность действовать более эффективно. Но против случайной смешанной стратегии у противника только одно средство — использование своей оптимальной смешанной стратегии, также определяемой случайным образом.

Сиреневые не употребляли еще нескольких важных терминов теории игр, с которыми полезно познакомиться читателю. Так, самая первая таблица, показывающая возможные потери сиреневых, называется *матрицей игры*. А величина v — средний урон, который понесут сиреневые в случае использования ими оптимальной смешанной стратегии, — называется *ценой игры*.

Способ рассуждений, который предложил генерал Нахит, — не зная, что сделает противник, считать все варианты равновероятными — принадлежит английскому математику XVIII века Т. Бейесу.

Как мы уже отмечали, в теории игр нет единого, обоснованного рецепта действий, что дает простор для творчества. Именно это обстоятельство и определило дальнейший ход совещания при штабе сиреневых после вынужденного перерыва, вызванного скверной привычкой генерала Мотса.

Калимна или Верда?

— Ну как, скоро? — торопил Дор врача.

Врач откинул спинной кожух Мотса и показал паяльником на пыльное хитросплетение тронутых ржавчиной транзисторов.

— Боюсь, что...

— Составьте дефектную ведомость, — коротко приказал Дор, — и дайте мне на утверждение.

Генералы понимающе мигнули — они знали закон сиреневых: после составления дефектной ведомости больного разбирали на запчасти, если стоимость ремонта превышала стоимость нового индивидуума. А здесь, по-видимому, дело шло к этому.

Дор невозмутимо продолжал.

— Я должен согласиться с генералом Мотсом. Рекомендуемая стратегия слишком рациональна. Между тем даже в нашем обществе, которое по своей морали и интеллекту куда выше общества фиолетовых, не все действуют разумно. Иначе откуда бы развилось это губительное пристрастие к молибдену, которое вдвое сокращает жизнь?

— Да будет позволено мне вставить слово, — снова вмешался Нахит. — К чему мы, собственно говоря, стремимся? Мы стремимся потерять как можно меньше дрокеров. Мы могли бы, разумеется, принять превосходное решение, если бы знали в точности, на что решится противник. Но узнать это мы не можем, несмотря на то, что наша разведка прикладывает героические усилия.

— Вот именно, — вырвалось у Луда.

— Давайте же действовать так, чтобы добиться наименьшего ущерба от возможных ошибок в выборе стратегии. Взглянем еще раз на таблицу. Если бы противник атаковал Калимну и мы защищали Калимну, то потеряли бы всего один дрокер. Это было бы верное решение. А если бы мы стали защищать Верду, то потеряли бы лишних 6—1=5 дрокеров. Аналогично при обстреле Верды, защищая Калимну, мы потеряем лишних 5—3=2 дрокера. Это позволяет составить следующую таблицу лишних потерь от неправильных решений:

Стратегия фиолетовых / Стратегия сиреневых	Атака на Калимну	Обстрел Верды
Защита Верды	5	0
Защита Калимны	0	2

А теперь остается составить задачу линейного программирования: $5p_1 \leqslant v$, $2p_2 \leqslant v$, $p_1+p_2=1$, $z_1=p_1/v$, $z_2=p_2/v$, $K=1/v$, откуда получаем систему

$$\begin{cases} 5z_1 \leqslant 1, \\ 2z_2 \leqslant 1, \\ z_1 \geqslant 0, \\ z_2 \geqslant 0, \\ K(z_1, z_2) = z_1 + z_2. \end{cases}$$

Наименьшее v, то есть наибольшее K, будет при $z_1=1/5$, $z_2=1/2$, откуда $K=7/10$, $v=10/7$, $p_1=2/7$, $p_2=5/7$. Смотрите-ка, было $p_1=4/7$, $p_2=3/7$, то есть $p_1>p_2$, а теперь наоборот: $p_2>p_1$. По этому критерию защита Верды куда менее привлекательна. Вы были правы, генерал Луд.

Тем временем Дор мельком взглянул на дефектную ведомость. Так и есть, больше половины узлов требует замены, в том числе дорогая система питания. Дешевле собрать на конвейере нового генерала. И он размашисто расписался.

— Так какой жребий вы предлагали, Рол? — спросил Дор, которому подход Нахита понравился больше, чем подход Рола, хотя Нахит решал совсем другую задачу: минимизировать не потери, а последствия ошибки. — Да, вспомнил: часы. Прикинем: 2/7 — это 17/60. Всего семнадцать секунд решают судьбу планеты! Дор поднял к фотореле шестое щупальце с часами. Секундная стрелка была вблизи 47 секунд.

— Подготовиться к защите Калимны! — приказал он. — Совещание объявляю закрытым! Позор фиолетовым!

— Позор фиолетовым! — эхом отозвалось совещание, и все стали быстро разъезжаться, унося с собой запах паров молибдена. Больше других торопился штабной врач: ему еще нужно было передать шифровку в штаб фиолетовых.

Второе возвращение на Землю

Да, такой исход трудно было предвидеть. Вся стратегия сиреневых строилась на отсутствии информации у обоих противников, в то время как фиолетовые теперь будут принимать решение при полной информации. В этом, конечно, нет вины американского математика Л. Сэвиджа, методом которого воспользовались сиреневые, он ничем не смог бы им помочь, если бы даже захотел: Сэвидж — специалист по статистике, а не по контрразведке. Но в любом случае выбор наилучшей стратегии — это очень тяжелая задача, допускающая неоднозначные решения.

Наилучшая стратегия не всегда существует. Например, ее нет в игре в «Спортлото»: вы можете как угодно назначать номера, и при этом вероятность угадывания какого-то количества номеров не изменится. Правда, нужно отметить, что существует возможность влиять на величину выигрыша: для этого нужно использовать такую стратегию, против которой большинство участвующих в игре почему-либо предубеждено — ведь выигрыш делится между угадавшими. Бывают явные предубеждения (например, некоторые уверены, что никогда не выиграют первые шесть номеров подряд), а бывают и неявные (числа кратные пяти, выбираются чаще других).

В развитой сейчас теории игр рассмотрено уже много задач. В некоторых из них выбор приходится делать не из конечного, а из бесконечного числа стратегий. Не все поставленные задачи решены — не решена, например, задача «Принцесса и Чудовище», сформулированная американским ученым Р. Айзексом.

В абсолютно темном помещении заключены Принцесса, которая может двигаться с любой скоростью и в любом направлении, и Чудовище, скорость которого ограничена. Чудовище захватывает Принцессу, если расстояние между ними становится меньше заданного. Какой должна быть стратегия Принцессы, чтобы она могла максимально оттянуть поимку (вероятно, до прихода принца)?

Ясно, что если Принцесса начнет метаться, сполна используя свою скорость, она сама наткнется на Чудовище, а если она будет стоять, то планомерный обход Чудовищем всего помещения принесет ему успех (в среднем за время, равное половине времени обхода). Айзекс полагает, что оптимальная стратегия Принцессы должна быть смешанной, но какой — никто не знает. По-видимому, Принцессе следует менять случайным образом скорость и направление.

Особенно трудно выбрать наилучшую стратегию, когда игра ведется не против разумного противника, который стремится нанести наибольший ущерб, а против природы. Стратегию природы нельзя предвидеть по принципу наибольшего ущерба — природа беззлобна. Чтобы проникнуть в ее стратегию, нужно знать физические законы, а этим занимается не теория игр, а совсем другие теории...

Упражнения

1. На этот раз первенство школы по футболу решили проводить без замен игроков. И перед 7$^{\text{а}}$ встала проблема: ставить или не ставить на матч с 7$^{\text{б}}$ рослого, но неповоротливого Сеню? Если противники догадаются поставить в защиту долговязого Колю, то Сеня будет нейтрализован и не забьет ни одного гола. Но если противники поставят не Колю, а Алика, то Сеня забьет верных три гола с навесов на штрафную площадку. Можно поставить вместо Сени юркого Васю — тот еще ни разу не уходил с поля без гола, а если его будет опекать не Алик, а Коля, то не миновать и двух голов. Кого же ставить — Сеню или Васю, если их возможности хорошо известны противникам?

2. Решить предыдущую задачу, если выбор приходится делать между Сеней и Петей, который всегда забивает ровно один гол.

3. Это ж надо! Остается час до начала занятий, а Петя из-за футбола еще не приготовил домашнего задания по алгебре, русскому и физике. Но ведь он обещал подтянуться по алгебре и физике на комсомольском собрании! Катастрофическая ситуация, если учесть, что сегодня наверняка будет контрольная или по алгебре, или по физике (ровно одна — как учителя договорятся, а учителя к нему придираются). За час можно подготовить только один предмет. Если выучить алгебру и по ней будет контрольная, то ее удастся написать на четверку, но если при этом контрольная будет по физике, то двойка обеспечена. А если выучить физику, то контрольная по ней принесет тройку, зато контрольная по алгебре принесет два балла. Наконец, если выучить русский, то двойки будут по любой из контрольных. За что же хвататься?

Н. Ростовцев

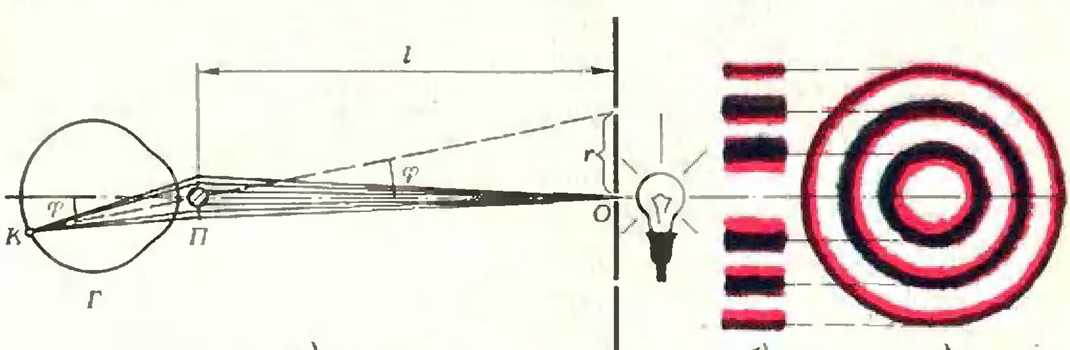
Как с помощью проволоки измерить длину световой волны

Совсем недавно в нашем журнале рассказывалось о том, как можно измерить длину волны видимого света с помощью... грампластинки (см. статью А. Бондаря «Грампластинка и дифракция света», «Квант», 1977, № 6). Теперь мы хотим познакомить наших читателей еще с одним способом определения длины световой волны — с помощью... мотка проволоки.

На пути света, идущего от точечного источника, непосредственно перед глазом *Г* (на расстоянии 2—3 *мм* от него) поместим тонкую проволоку *П* диаметром 0,05—0,12 *мм*, расположенную вертикально (рис. 1, *а*). Тогда слева и справа от источника мы увидим узкую светлую полоску. Она возникает вследствие дифракции света, поэтому будем называть ее дифракционной полоской. Роль точечного источника света при этих наблюдениях может играть малое отверстие *О* в ширме *А*, установленной перед лампочкой (см. рис. 1, *а*). Проволоку *П* можно заменить тонкой нитью или волосом.

При внимательном рассмотрении дифракционной полоски в ее середине виден белый участок с красноватыми краями — нулевой максимум (рис. 1, *б*), с обеих сторон он ограничен узкими темными промежутками — первыми минимумами. Затем идут цветные участки, в которых при удалении от центра полоски зеленовато-голубая окраска постепенно переходит в красную. За красным краем этих участков опять следуют темные промежутки — вторые минимумы. Далее картина повторяется с той лишь разницей, что минимумы просматриваются все хуже, и в конце концов светлые участки сливаются в сплошную полоску. Наблюдения, проведенные с проволокой разного диаметра, показывают, что расстояние между двумя соседними минимумами тем больше, чем меньше диаметр проволоки.

Теперь кусок проволоки, с которой проводились наблюдения дифракционной полоски, скомкаем в моток, имеющий форму диска диаметром с копеечную монету. Для этого достаточно взять проволоку длиной 2—3 *м*. Поместим получившийся моток перед глазом и посмотрим на точечный источник света. Теперь мы увидим венцы — центральный белый круг с красноватыми краями, окруженный цветными кольцами (рис. 1, *в*). Венцы отделяются друг от друга узкими темными кольцами — минимумами. Каждое темное кольцо следует за красным краем предыдущего венца. Причем, если расстояние до источника то же, что и при наблюдении



а)   б)   в)

дифракции от проволоки, диаметры темных колец оказываются равными расстояниям между соответствующими минимумами дифракционной полоски (см. рис. 1, *б* и *в*). Венцы видны тем лучше, чем меньше диаметр проволоки.

Почему же возникают венцы при помещении мотка проволоки на пути лучей, идущих от точечного источника света? Каждый малый участок проволоки, находящийся перед глазом, дает свою дифракционную полоску, расположенную симметрично относительно источника света. Вследствие различной ориентации участков проволоки в мотке различные направления имеют и возникающие от них дифракционные полоски, причем все они пересекаются в одной точке, совпадающей с источником света. Толщина всех участков проволоки одинакова, поэтому минимумы одного и того же порядка располагаются во всех дифракционных полосках на одинаковом расстоянии от источника света и сливаются в темные кольца. Цветные участки, заключенные между минимумами, сливаются при этом в цветные кольца.

Найдем теперь условия возникновения минимумов при дифракции от проволоки (прямоугольного препятствия) для монохроматического света длины волны λ. Будем считать, что источник света достаточно удален, так что лучи, идущие от него, являются параллельными. Рассмотрим нормальное падение лучей на преграду (рис. 2). Согласно принципу Гюйгенса каждая точка среды, до которой дошла волна, становится точечным источником (вторичным), от которого волны распространяются по всем направлениям. В отсутствие препятствия результат интерференции этих вторичных волн оказывается таким, что свет распространяется только по прямой, соединяющей источник света с наблюдателем. По всем другим направлениям происходит гашение света. Наличие препятствия нарушает условие интерференции вторичных волн, и гашение света наблюдается лишь по вполне определенным направлениям (минимумы дифракционной картины).

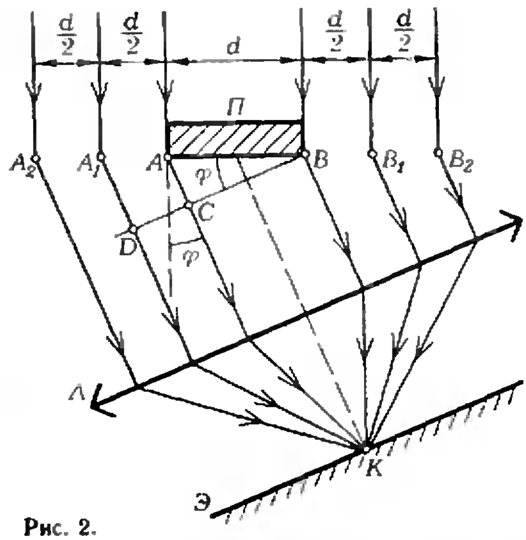


Рис. 2.

Рассмотрим волны, которые дифрагируют под углом φ к первоначальному направлению. Глаз сводит их на сетчатку в одну точку (точка K на рисунке 1, *а*), где при наложении они интерферируют. На рисунке 2 роль глаза играет линза $Л$, а роль сетчатки — экран $Э$, расположенный в фокальной плоскости линзы. (Для упрощения рассуждений линза $Л$ расположена так, что ее главная оптическая ось параллельна дифрагирующим лучам.) Результат интерференции в точке K зависит от разности хода волн, идущих от крайних точек A и B преграды $П$. Непосредственно из рисунка 2 эта разность хода равна $|AC| = d\sin\varphi$, где d — ширина преграды. Строгий расчет дает, что при дифракции от прямоугольной преграды минимумы наблюдаются, когда разность хода волн от крайних точек преграды

$$d\sin\varphi = k\lambda, \qquad (1)$$

где λ — длина световой волны, k — номер (порядок) минимума ($k = 1, 2, \ldots$).

Покажем справедливость формулы (1) для первого минимума, то есть для $k=1$. Пусть вторичные волны от всех точек волнового фронта распространяются под углом φ таким, что выполняется условие

$$d\sin\varphi = \lambda. \qquad (2)$$

Мысленно разобьем волновой фронт на прямоугольные параллельные преграде зоны одинаковой ширины $d/2$. На рисунке 2 этим зонам соответствуют участки AA_1, A_1A_2, ... и BB_1, B_1B_2, ... Рассмотрим вначале волны от зон AA_1 и BB_1. Точки в этих зонах, отстоящие друг от друга на расстоянии $3/2\ d$, например, точки A_1 и B, будем называть соответственными. У всех волн, выходящих из соответственных точек, разность хода будет одинаковой. Из треугольника A_1BD эта разность хода равна

$$|A_1D| = 3/2\ d \sin\varphi. \qquad (3)$$

Из соотношений (2) и (3) следует, что $|A_1D| = 3/2\ \lambda$, то есть разность хода равна нечетному числу полуволн. Такие волны гасят друг друга. Следовательно, все волны от зон AA_1 и BB_1 при выполнении условия (2) гасятся в точке K.

Аналогичные рассуждения можно провести для любой пары последующих симметрично расположенных зон и показать, что волны от всех зон гасят друг друга и в точке K действительно наблюдается минимум.

Таким же образом можно показать, что второй минимум наблюдается при выполнении условия $d\sin\varphi = 2\lambda$. В этом случае волновой фронт надо разбить на зоны шириной $d/4$ и провести соответствующие рассуждения.

Формула (1) позволяет определить длину световой волны:

$$\lambda = \frac{d\sin\varphi}{k}.$$

Однако измерения значительно упрощаются, если использовать простейшее измерительное устройство, называемое *эриометром*. Для изготовления эриометра берут квадратный кусок картона со стороной 10—15 *см* и в его середине проводят окружность радиусом r=20—30 *мм*. В центре окружности прокалывают отверстие диаметром 2—3 *мм*, а вдоль окружности прокалывают 6—8 отверстий меньшего диаметра.

При измерениях эриометр A (см. рис. 1, *а*) устанавливают непосредственно перед лампочкой накаливания. Отойдя от эриометра на расстояние 1—2 *м*, находят такое положение, при котором через отверстие O в глаз наблюдателя попадают лучи, идущие непосредственно от одного из участков раскаленной нити. Затем перед глазом помещают моток проволоки и добиваются хорошего видения венцов, перемещая моток в направлении, перпендикулярном лучам. Изменяя расстояние между эриометром и глазом, находят положение, при котором окружность эриометра с отверстиями совпадает с серединой темного кольца с номером k (на рисунке 1 изображен случай, когда $k=2$).

Как видно из рисунка 1, тангенс угла дифракции φ для темного кольца подсчитывается по формуле $\operatorname{tg}\varphi = r/l$, где r — радиус окружности эриометра, l — расстояние от эриометра до мотка проволоки. При малых углах дифракции, с которыми приходится иметь дело при таких измерениях, справедливо соотношение

$$\sin\varphi = \operatorname{tg}\varphi = \frac{r}{l}.$$

Подставляя значение $\sin\varphi$ в выражение (1), получаем формулу для определения длины волны:

$$\lambda = \frac{dr}{kl}. \qquad (4)$$

Радиус окружности эриометра r нам заранее известен. Расстояние l легко измерить. Номер темного кольца k определяется при наблюдении венцов. Диаметр проволоки d, если он не известен, измеряют микрометром.

Если измерения производят в белом свете, то по формуле (4) находят эффективную длину световой волны, к которой наиболее чувствителен наш глаз. Она приблизительно равна 0,56 *мкм*. Световые волны такой длины соответствуют зеленой части спектра.

Венцы могут возникать и при дифракции света на круглых преградах. Наблюдать их можно следующим образом. Насыпьте на стеклянную пластинку небольшое количество ликоподия (ликоподий — порошок из спор плауна, его можно купить в аптеке). Легким постукиванием торца пластины о стол удалите излишек порошка. Если через такую пластинку посмотреть на точечный источник света, то вы увидите венцы. Роль круглых преград в этом опыте играют споры сферической формы. Особенно яркие венцы возникают при рассматривании капли крови, сжатой между двумя стеклянными пластинами. В этом случае венцы возникают при дифракции на эритроцитах — красных кровяных тельцах.

Венцы, возникающие от круглых и прямоугольных преград, несколько отличаются друг от друга. Условие минимумов для венцов от прямоугольных преград выражается соотношением (1). Для венцов от круглых препятствий оно имеет вид:

$$d\sin\varphi=1{,}22\lambda;\ 2{,}23\lambda;\ \dots \qquad (5)$$

Здесь d — диаметр круглого экрана. Применяя эриометр, по формуле (5) можно определить средний диаметр спор плауна и эритроцитов без микроскопа!

В природе венцы наблюдаются вокруг Солнца, Луны и даже планет. Они возникают при прохождении света через облако, состоящее из капелек воды (круглые преграды) или ледяных кристалликов — призмочек (прямоугольные преграды). Хорошо видимые венцы получаются лишь в том случае, когда в облаке преобладают капельки одинакового диаметра или кристаллики одинаковой толщины. Иногда венцы наблюдаются при прохождении света от удаленного фонаря через слой тумана или оконное стекло, покрытое морозными узорами.

Упражнения

1. По известной эффективной длине волны ($\lambda = 0{,}56$ *мкм*) найдите с помощью эриометра диаметр элементарных нитей, из которых изготавливают капроновые чулки и ленты.

2. Как по виду венцов определить, состоит ли облако из водяных капелек или кристалликов льда?

3. Угловой диаметр Луны равен 32'. Оцените диаметр капелек в облаке, если угловой радиус центрального круга в венцах в четыре раза больше углового диаметра Луны.

Задачи наших читателей

1. Дан треугольник ABC площади S, в котором $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$, p — полупериметр, $p_a = p - a$, $p_b = p - b$, $p_c = p - c$; r_a, r_b, r_c — радиусы вневписанных окружностей, касающихся соответственно сторон BC, CA, AB; R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности.

Доказать, что

а) $$\frac{p_a}{\cos\frac{\hat A}{2}\sin\frac{\hat B}{2}\sin\frac{\hat C}{2}} = \frac{p_b}{\cos\frac{\hat B}{2}\sin\frac{\hat C}{2}\sin\frac{\hat A}{2}} = \frac{p_c}{\cos\frac{\hat C}{2}\sin\frac{\hat A}{2}\sin\frac{\hat B}{2}} = 4R;$$

б) $$\frac{r_a}{\sin\frac{\hat A}{2}\cos\frac{\hat B}{2}\cos\frac{\hat C}{2}} = \frac{r_b}{\sin\frac{\hat B}{2}\cos\frac{\hat C}{2}\cos\frac{\hat A}{2}} = \frac{r_c}{\sin\frac{\hat C}{2}\cos\frac{\hat A}{2}\cos\frac{\hat B}{2}} = 4R;$$

в) $$r_a\,\mathrm{tg}\frac{\hat B}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\hat C}{2} = r_b\,\mathrm{tg}\frac{\hat C}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\hat A}{2} = r_c\,\mathrm{tg}\frac{\hat A}{2}\times\mathrm{tg}\frac{\hat B}{2} = r;$$

г) $$S = r_a^2\,\mathrm{ctg}\frac{\hat A}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\hat B}{2}\times\mathrm{tg}\frac{\hat C}{2} = r_b^2\,\mathrm{ctg}\frac{\hat B}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\hat C}{2}\times\mathrm{tg}\frac{\hat A}{2} = r_c^2\,\mathrm{ctg}\frac{\hat C}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\hat A}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\hat B}{2};$$

д) $$S = p_a^2\,\mathrm{tg}\frac{\hat A}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\hat B}{2}\times\mathrm{ctg}\frac{\hat C}{2} = p_b^2\,\mathrm{tg}\frac{\hat B}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\hat C}{2}\times\mathrm{ctg}\frac{\hat A}{2} = p_c^2\,\mathrm{tg}\frac{\hat C}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\hat A}{2}\times\mathrm{ctg}\frac{\hat B}{2};$$

е) $$\frac{\mathrm{tg}\frac{\hat A}{2}}{r_a^2} + \frac{\mathrm{tg}\frac{\hat B}{2}}{r_b^2} + \frac{\mathrm{tg}\frac{\hat C}{2}}{r_c^2} = \frac{1}{S};$$

ж) $$\frac{1}{p_ap_b} + \frac{1}{p_bp_c} + \frac{1}{p_cp_a} = \frac{1}{r^2}.$$

У. Алла
(г. Выру)

2. В системе

$$\begin{cases} 2\cdot\overline{он} = \overline{тук}, \\ 7\cdot\overline{трон} = \overline{туктук} \end{cases}$$

разным буквам соответствуют разные, отличные от нуля цифры. Определить, какое четырехзначное число соответствует слову «трон».

М. Штеренберг
(г. Саратов)

3. Доказать, что при любом натуральном t значение многочлена $36t^4 + 48t^3 + 40t^2 + 16t + 5$ является составным числом.

Г. Шахов
(дер. Н. Табын Тат. АССР)

В. Рабинович

Аффинные задачи и теоремы

Можно ли задачу о параллелограмме решать для квадрата? Достаточно ли теорему о треугольниках доказать для равносторонних треугольников? Оказывается, иногда можно, иногда достаточно. О таких задачах и теоремах рассказывается в данной статье.

1. Параллельное проектирование

Пусть имеются две плоскости α и β и прямая a, пересекающая каждую из этих плоскостей (рис. 1). Определим отображение Π_a плоскости α на плоскость β следующим образом: произвольной точке $A \in \alpha$ поставим в соответствие точку $A' \in \beta$, в которой прямая, проходящая через точку A и параллельная прямой a, пересекается с плоскостью β. Применяя обычные функциональные обозначения, будем писать $\Pi_a(A)=A'$. Отображение Π_a естественно называется *параллельным проектированием*. Очевидно, если $A \neq B$ ($A \in \alpha$ и $B \in \alpha$), то $\Pi_a(A) \neq \Pi_a(B)$. Таким образом, параллельное проектирование является обратимым отображением («Алгебра 8», п. 20)*). Поэтому можно говорить об обратном отображении. Отображение Π_a^{-1}, обратное к параллельному проектированию Π_a, будет, очевидно, параллельным проектированием плоскости β на плоскость α: $\Pi_a^{-1}(A')=A$.

Параллельное проектирование Π_a любую фигуру Г на плоскости α переводит в некоторую фигуру Π_a (Г) на плоскости β (рис. 1) — *образ фигуры* Г *при отображении* Π_a.

У п р а ж н е н и е 1. Докажите, что образ прямой при параллельном проектировании есть прямая и при этом, если точка A лежит между B и C, то $\Pi_a(A)$ лежит между $\Pi_a(B)$ и $\Pi_a(C)$.

Отсюда, очевидно, вытекает, что образ отрезка есть отрезок, образ многоугольника есть многоугольник (с тем же числом сторон).

У п р а ж н е н и е 2. Докажите, что параллельное проектирование сохраняет параллельность: если $l \parallel m$, то $\Pi_a(l) \parallel \Pi_a(m)$.

Значит, образ параллелограмма — параллелограмм, образ трапеции — трапеция.

У п р а ж н е н и е 3. Докажите, что отношение длин параллельных отрезков есть инвариант параллельного проектирования: если отрезки AB, CD лежат на одной прямой (или на параллельных прямых) в плоскости α, то $\frac{|AB|}{|CD|}=\frac{|A'B'|}{|C'D'|}$ (здесь $A'=\Pi_a(A)$ и т. д.).

Следовательно, если AK — медиана треугольника ABC ($\triangle ABC \subset \alpha$), то $A'K'$ — медиана треугольника $A'B'C'$.

У п р а ж н е н и е 4. Докажите, что отношение площадей фигур есть инвариант параллельного проектирования: если $\Gamma \subset \alpha$ и $\Delta \subset \alpha$, то $\frac{S(\Gamma)}{S(\Delta)}=\frac{S(\Pi_a(\Gamma))}{S(\Pi_a(\Delta))}$. У к а з а н и е. При доказательстве разрешается

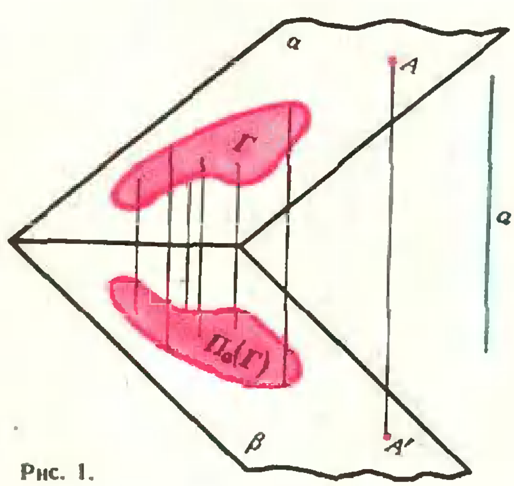


Рис. 1.

*) Параллельное проектирование, рассматриваемое в данной статье, есть отображение п л о с к о с т и (на плоскость). Параллельное проектирование из §12 «Геометрии 9» есть отображение п р о с т р а н с т в а (на плоскость). Обратимым оно не является.

воспользоваться тем, что для любой фигуры $\Gamma \subset \alpha$ при ортогональном проектировании П на плоскость γ выполняется соотношение: $S(П(\Gamma)) = S(\Gamma) \cdot \cos\varphi$, где φ — угол между плоскостями α и γ (см. § 50 «Геометрии 10» или «Квант», 1972, № 6, с. 13).

2. Аффинный образ

Назовем плоскую фигуру Δ *аффинным образом* плоской фигуры Γ, если при некотором параллельном проектировании Π_a имеем $\Delta = \Pi_a(\Gamma)$, то есть если можно подобрать такие плоскости α, β (подобрать плоскости — это, конечно, означает «подобрать угол между плоскостями») и прямую a и так разместить фигуры Γ, Δ в плоскостях, соответственно, α и β, что $\Pi_a(\Gamma) = \Delta$*).

Упражнение 5. Докажите, что, каковы бы ни были треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, среди треугольников, подобных треугольнику $A_1B_1C_1$, существует аффинный образ треугольника ABC.

Таким образом, среди аффинных образов произвольного треугольника есть равносторонний треугольник.

Упражнение 6. Докажите, что среди аффинных образов произвольного параллелограмма есть квадрат.

Упражнение 7. Докажите, что среди аффинных образов произвольной трапеции есть равнобедренная трапеция.

Упражнение 8. Докажите, что среди аффинных образов произвольного выпуклого четырехугольника есть четырехугольник с равными и взаимно перпендикулярными диагоналями.

Упражнение 9. Верно ли, что среди аффинных образов произвольного центрально симметричного шестиугольника есть правильный шестиугольник?

3. Аффинные свойства и теоремы

Свойство плоской фигуры называется *аффинным*, если оно сохраняется при параллельном проектировании. Например, в силу упражнения 2, параллельность прямых — аффинное свойство.

Упражнение 10. Докажите, что свойство «точка M есть середина отрезка AB» — аффинное.

Отсюда вытекает, что свойство «AD — медиана треугольника ABC» — аффинное.

Упражнение 11. Докажите, что свойство «KL — средняя линия трапеции $ABCD$» — аффинное.

---

*) Слово «аффинный» происходит от латинского слова *affinus* («родственный», «соответственный»).

Планиметрическая теорема называется *аффинной*, если ее условие и заключение являются аффинными свойствами.

Переформулируем, например, теорему *«Диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам»* следующим образом: *если $ABCD$ — параллелограмм и $[AC] \cap [BD] = O$, то $|AO| = |OC|$ и $|BO| = |OD|$*. Из упражнений 2, 10 вытекает, что эта теорема — аффинная.

Упражнение 12. Докажите, что теорема *«Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2 : 1 (считая от вершины)»* — аффинная. Указание. Переформулируйте ее предварительно в виде *импликации*: если A, то B.

Упражнение 13. Докажите, что теорема *«Средняя линия трапеции параллельна основаниям и длина ее равна полусумме длин оснований»* — аффинная.

Аффинные теоремы и можно как раз доказывать тем «недопустимым» способом, о котором говорилось в начале статьи — переходом к аффинным образам.

Докажем таким способом, для примера, теорему: прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и точку пересечения продолжений ее боковых сторон, делит основания трапеции пополам. Переформулируем ее в виде импликации: если $ABCD$ — трапеция, $[AD] \parallel [BC]$, $[AC] \cap [BD] = O$, $(AB) \cap (CD) = K$, $(KO) \cap [BC] = P$ и $(KO) \cap [AD] = Q$, то $|BP| = |PC|$ и $|AQ| = |QD|$ (рис. 2).

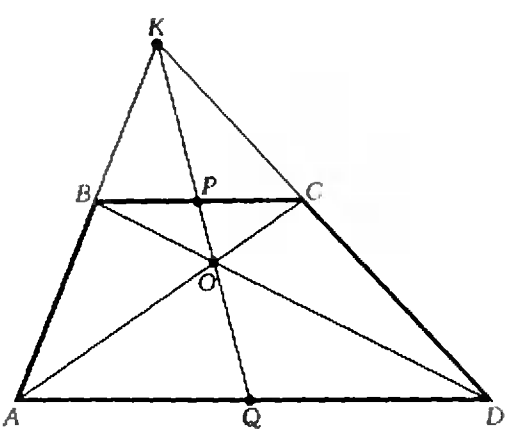


Рис. 2.

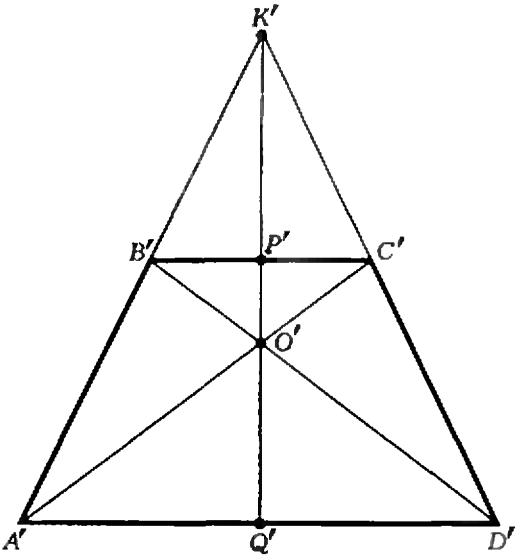


Рис. 3.

Из упражнений 2, 10 вытекает, что эта теорема — аффинная. Согласно упражнению 7 среди аффинных образов данной трапеции $ABCD$ есть равнобедренная трапеция. Проделав соответствующее параллельное проектирование Π, перейдем от трапеции $ABCD$ к равнобедренной трапеции $A'B'C'D'$. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ перейдут при этом в диагонали $A'C'$ и $B'D'$ трапеции $A'B'C'D'$, точки O, K, P, Q в точки, соответственно, $O' = [A'C'] \cap [B'D']$, $K' = (A'B') \cap (C'D')$, $P' = (K'O') \cap [B'C']$ и $Q' = (K'O') \cap [A'D']$ (рис. 3).

В равнобедренной трапеции $A'B'C'D'$, как известно, $|A'C'| = |B'D'|$ и $\widehat{B'A'D'} = \widehat{C'D'A'}$ (задача 2 к п. 50 «Геометрии 7»). Отсюда легко вывести, что $|A'K'| = |D'K'|$ и $\widehat{A'K'Q'} = \widehat{D'K'Q'}$. Следовательно, в равнобедренном треугольнике $A'K'D'$ отрезок $K'Q'$ является биссектрисой, а значит — и медианой: $|A'Q'| = |Q'D'|$. Аналогично доказывается, что $|B'P'| = |P'C'|$.

Проделаем теперь обратное параллельное проектирование Π^{-1}. При Π^{-1} «всё» перейдет «обратно»: A' — в A, B' — в B и т. д. Из упражнения 10 вытекает, что $|BP| = |PC|$ и $|AQ| = |QD|$.

На самом деле, если мы заранее проверили, что доказываемая нами теорема — аффинная, и мы доказываем ее таким способом (переходом к аффинному образу), то обратное проектирование делать не нужно: верность заключения доказываемой теоремы вытекает просто из его аффинности.

Так можно доказывать — в принципе — любую аффинную теорему.

Упражнение 14. Докажите таким образом теоремы из упражнений 12, 13.

4. Взгляд с высоты

На самом деле, более естественным определением аффинного образа было бы следующее определение: плоская фигура Δ называется *аффинным образом* плоской фигуры Γ, если ее можно получить из Γ при помощи композиции конечного числа параллельных проектирований. Аналогично, свойство плоской фигуры естественно называть *аффинным*, если оно сохраняется при композиции конечного числа параллельных проектирований.

Так определенное понятие аффинного образа (в отличие от того, которое было определено в п. 2) является транзитивным: если Δ — аффинный образ (плоской) фигуры Γ, а Σ — аффинный образ фигуры Δ, то Σ — аффинный образ фигуры Γ. Поскольку это понятие также симметрично (если Δ — аффинный образ фигуры Γ, то и Γ — аффинный образ фигуры Δ) и рефлексивно (любая плоская фигура Γ является аффинным образом самой себя), можно (=разумно) дать следующее определение: две плоские фигуры Γ, Δ называются *аффинно эквивалентными*, если одна из них является аффинным образом другой.

Вместо теорем из упражнений 5—7 можно теперь сформулировать более изящные теоремы: все треугольники аффинно эквивалентны, все параллелограммы аффинно эквивалентны, все трапеции аффинно эквивалентны.

В школьной геометрии фигуры фактически рассматриваются с точностью до конгруэнтности, т. е. конгруэнтные фигуры как бы отождествляются, считаются эквивалентными. Поэтому эту геометрию можно рассматривать как науку о свойствах фигур, не меняющихся при п е р е м е щ е н и я х.

Геометрия на плоскости, в основу которой положены композиции конечного числа параллельных проектирований *) (такие композиции называются *аффинными преобразованиями плоскости*), т. е. геометрия, в которой аффинно эквивалентные фигуры отождествляются, называется *аффинной геометрией*. Аффинная геометрия — это наука о свойствах фигур, не меняющихся при а ф ф и н н ы х п р е о б р а з о в а н и я х. В этой статье вы познакомились с некоторыми понятиями этой геометрии.

З а д а ч и

1. Через точку P, лежащую внутри треугольника ABC, проведены прямые l, m, n, параллельные, соответственно, $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$. Пусть $l \cap [BC] = A_1$, $m \cap [AC] = B_1$, $n \cap [AB] = C_1$. Докажите, что $\frac{|PA_1|}{|AB|} + \frac{|PB_1|}{|BC|} + \frac{|PC_1|}{|CA|} = 1$.

2. Докажите т е о р е м у М е н е л а я: если прямая l пересекает сторону AB треугольника ABC в точке R, сторону BC — в точке P и продолжение стороны AC — в точке Q, то $\frac{|PB| \cdot |QC| \cdot |RA|}{|PC| \cdot |QA| \cdot |RB|} = 1$.

3. В треугольнике ABC через точки $L \in [AC]$ и $K \in [AC]$ такие, что $|AL| = |CK|$, проведены, соответственно, прямые $l \parallel AB$ и $k \parallel BC$. Пусть $k \cap l = O$. Докажите, что прямая BO проходит через середину отрезка AC.

4. На сторонах AB, BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$ взяты, соответственно, точки P, Q, R и S. Найти площадь четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$, образованного при пересечении прямых AR, BS, CP и DQ, если площадь исходного параллелограмма $ABCD$ равна t, $|AS| = |CQ|$, $|BP| = |DR|$ и $\frac{|AS|}{|AD|} = \frac{|DR|}{|CD|}$.

5. В параллелограмме $ABCD$ точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат, соответственно, на $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ и $[DA]$. На сторонах A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1 и D_1A_1 четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ взяты, соответственно, точки

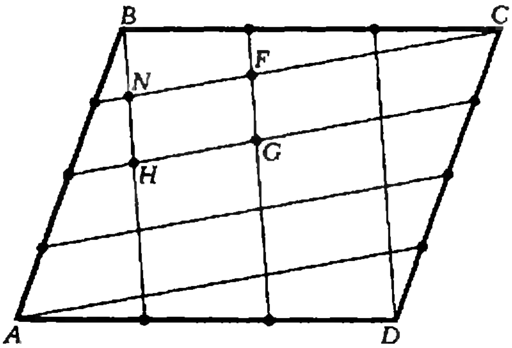


Рис. 4.

A_2, B_2, C_2 и D_2. Известно, что

$$\frac{|AA_1|}{|BA_1|} = \frac{|BB_1|}{|CB_1|} = \frac{|CC_1|}{|DC_1|} = \frac{|DD_1|}{|AD_1|} =$$
$$= \frac{|A_1D_2|}{|D_1D_2|} = \frac{|D_1C_2|}{|C_1C_2|} = \frac{|C_1B_2|}{|B_1B_2|} = \frac{|B_1A_2|}{|A_1A_2|}.$$

Докажите, что четырехугольник $A_2B_2C_2D_2$ — параллелограмм, стороны которого параллельны сторонам исходного параллелограмма.

6. Пусть $ABCD$ — параллелограмм и прямая l пересекает лучи $[AB)$, $[AC)$, $[AD)$ в точках, соответственно, P, Q и R. Докажите, что $\frac{|AB|}{|AP|} + \frac{|AD|}{|AR|} = \frac{|AC|}{|AQ|}$.

7. В параллелограмме $ABCD$ сторона AB разделена на m, сторона BC — на n равных частей. Через точки деления проведены прямые так, как показано на рисунке 4. Какую часть площади параллелограмма $ABCD$ составляет площадь четырехугольника $NFGH$?

8. В трапеции $ABCD$ ($[AD] \parallel [BC]$) через точку B проведена прямая, параллельная CD и пересекающаяся с $[AC]$ в точке P, а через C — прямая, параллельная AB и пересекающаяся с $[BD]$ в Q. Докажите, что $[PQ] \parallel [AD]$.

9. В трапеции $ABCD$ ($[AD] \parallel [BC]$) через точку C проведена прямая, параллельная AB и пересекающаяся с BD в точке P. Известно, что $|BO| = |PD|$, где $O = [AC] \cap [BD]$. Докажите, что $|AD|^2 = |BC|^2 + |AD| \cdot |BC|$.

---

*) В этой статье параллельное проектирование рассматривается как отображение одной плоскости, вообще говоря, на другую. Но в результате к о м п о з и ц и и таких отображений мы можем добиться расположения образа в первоначальной плоскости.

задачник Кванта

Задачи

М456—М460; Ф468—Ф472

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 ноября 1977 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М456, М457» или «Ф468». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. В этом и следующем номерах «Задачник «Кванта» составлен в основном из задач, предлагавшихся на последней Всесоюзной олимпиаде.

М456. В каждой вершине выпуклого многогранника сходится 3 ребра. Известно, что каждая его грань является многоугольником, вокруг которого можно описать окружность. Докажите, что вокруг этого многогранника можно описать сферу.

В. Произволов

М457. На плоскости дана несамопересекающаяся замкнутая ломаная, никакие три вершины которой не лежат на одной прямой. Назовем пару несоседних звеньев особенной, если продолжение одного из них пересекает другое (рис. 1). Докажите, что число особенных пар четно.

С. Фомин

М458. Написан многочлен $x^{10}+*x^9+*x^8+\ldots+*x^2+*x+1$. Двое играют в такую игру. Сначала первый заменяет любую из звездочек некоторым числом, затем второй заменяет числом любую из оставшихся звездочек, затем снова первый заменяет одну из звездочек числом и так далее (всего 9 ходов). Если у полученного многочлена не будет действительных корней, то выигрывает первый игрок, а если будет хотя бы один корень — выигрывает второй. Может ли второй игрок выиграть при любой игре первого?

Д. и И. Бернштейны

М459. В некоторой стране из каждого города в любой другой можно проехать, минуя остальные города. Известна стоимость каждого такого проезда. Составлены два маршрута поездки по городам страны. В каждый из этих маршрутов каждый город входит ровно по одному разу. При составлении первого маршрута руководствовались следующим принципом: начальный пункт маршрута выбирается произвольно, а на каждом следующем шаге среди городов, через которые маршрут еще не проходил, выбирается тот, поездка в который из предыдущего города имеет наименьшую стоимость (если таких городов несколько, то выбирается любой из них); и так до тех пор, пока не будут пройдены все города. При составлении второго маршрута

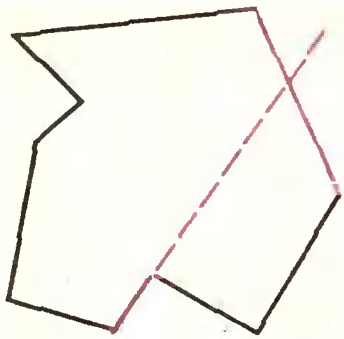


Рис. 1.

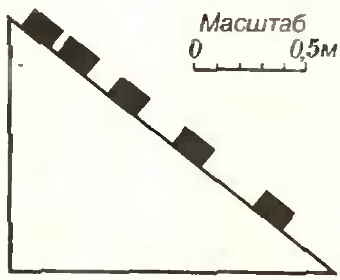


Рис. 2.

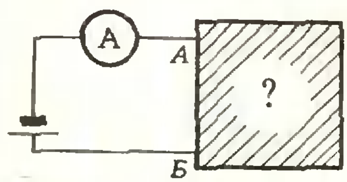


Рис. 3.

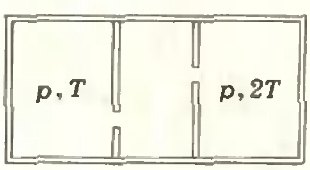


Рис. 4.

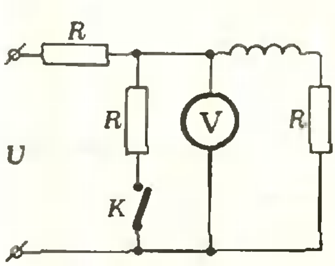


Рис. 5.

начальный город тоже выбирается произвольно, а на каждом следующем шаге среди городов, через которые маршрут еще не проходил, выбирается тот, поездка в который из предыдущего города имеет наибольшую стоимость. Докажите, что общая стоимость проезда по первому маршруту не больше общей стоимости проезда по второму маршруту.

А. Берзиньш

М460. Пусть A — $2n$-значное число (первая цифра не нуль). Будем называть число A *особым*, если оно само является точным квадратом и числа, образованные его первыми n цифрами и его последними n цифрами, также являются точными квадратами; при этом второе число может начинаться с цифры 0, но не должно быть равно нулю.

а) Найдите все двузначные и четырехзначные особые числа.

б) Докажите, что существует хотя бы одно 20-значное особое число.

в) Докажите, что существует не более 10 особых 100-значных чисел.

г) Докажите, что существует хотя бы одно 30-значное особое число.

А. Левин, И. Бернштейн

Ф468. Действующая модель подъемного крана способна поднять 10 бетонных плит без обрыва троса. Сколько плит поднимает реальный кран, изготовленный из тех же материалов, если линейные размеры крана, троса и плит в 12 раз больше, чем в модели? (8 кл.)

Ф469. Рисунок 2 сделан со стробоскопической фотографии кубика, движущегося вдоль наклонной плоскости. Промежутки времени между последовательными вспышками лампы равны 0,1 *сек*. Определить коэффициент трения кубика о плоскость. (8 кл.)

Ф470. При подключении гальванического элемента напряжением 1,5 *в* к зажимам A и $Б$ амперметр показал ток 1 *а* (рис. 3). Когда полярность элемента изменили на противоположную, ток упал в два раза. Какая электрическая цепь находится внутри коробки? (8 кл.)

Ф471. Теплоизолированная полость небольшими одинаковыми отверстиями соединена с двумя объемами, содержащими газообразный гелий (рис. 4). Давление гелия в этих объемах поддерживается постоянным и равным p, а температуры поддерживаются равными T в одном из объемов и $2T$ в другом. Найти установившиеся давление и температуру внутри полости. (10 кл.)

Ф472. Нарисовать примерный график зависимости от времени показания вольтметра после размыкания ключа K (рис. 5). Вольтметр и катушка индуктивности идеальные, $R = 100$ *ом*, $U = 300$ *в*. (10 кл.)

Решения задач

М416—М419; Ф428—Ф431

М416. *На плоскости даны n точек $A_1, \ldots, A_n$, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Какое наибольшее число отрезков с концами в этих точках можно провести так, чтобы не получилось ни одного треугольника с вершинами в этих точках?*

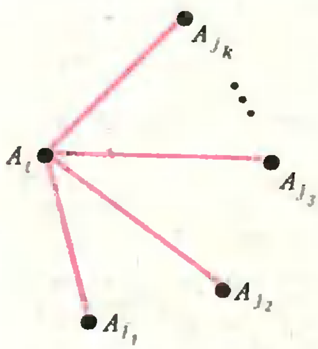


Рис. 1.

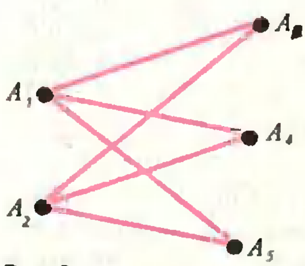


Рис. 2.

Проведем максимальное число отрезков с концами в точках $A_1, \ldots, A_n$. Получим некоторый *граф* с вершинами в этих точках. Отрезки с концами в вершинах графа будем называть *ребрами* графа. Оценим число ребер в нашем графе.

Назовем *степенью вершины* в графе число выходящих из нее ребер. Пусть k — максимальная степень вершины в графе, и пусть некоторая вершина A_i соединена с k вершинами $A_{j_1}, \ldots, A_{j_k}$ графа (рис. 1). Тогда степень любой вершины из множества $\{A_{j_1}, \ldots, A_{j_k}\}$ не превосходит $n-k$ (n — число вершин графа), поскольку любые вершины из этого множества уже не могут быть соединены ребром (в нашем графе никакие три ребра не образуют треугольника — с вершинами в вершинах графа). Так как k — максимальная степень вершины в графе, степень каждой из оставшихся $n-k$ вершин не превосходит k. Поэтому сумма степеней всех вершин графа не превосходит $k\cdot(n-k)+(n-k)\cdot k=2k(n-k)$. Но легко видеть, что сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному количеству его ребер. Следовательно, количество ребер графа не больше $k(n-k)\leqslant\left(\frac{k+(n-k)}{2}\right)^2=\frac{n^2}{4}$ (мы воспользовались теоремой о среднем арифметическом и среднем геометрическом). Учитывая, что количество ребер графа — число целое, мы получаем, что ребер в нашем графе не больше чем $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ (здесь $[x]$ означает *целую часть* числа x — наибольшее целое число, не превосходящее x).

Укажем теперь способ построения графа без треугольников с n вершинами, число ребер которого в точности равно $\left[\frac{n^2}{4}\right]$.

Разобьем множество точек $A_1, \ldots, A_n$ на два: $\left[\frac{n}{2}\right]$ точек в одном множестве и $n-\left[\frac{n}{2}\right]$ — в другом. Соединив все точки первого множества с точками второго (как на рисунке 2, где $n=5$), мы получим граф, у которого не будет ни одного треугольника с вершинами в точках $A_1, \ldots, A_n$. Число ребер в этом графе, очевидно, равно $\left[\frac{n}{2}\right]\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right)$. Если n — четное, то $\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right)=\frac{n^2}{4}=\left[\frac{n^2}{4}\right]$. Если n — нечетное, то $\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right)=\frac{n-1}{2}\left(n-\frac{n-1}{2}\right)=$
$=\frac{n^2-1}{4}=\left[\frac{n^2}{4}\right]$, что и требовалось доказать.

Итак, ответ в задаче: максимальное число отрезков равно $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ (этот результат в теории графов называют *теоремой Турана*).

Г. Фридман

◆

М417. *На поверхности куба с ребром 1 расположена замкнутая ломаная линия. На каждой грани куба находится по крайней мере одно звено ломаной. Докажите, что длина ломаной не меньше $3\sqrt{2}$.*

Пусть $l_1, l_2, \ldots, l_k$ — звенья ломаной. Спроектируем каждое звено l_i ломаной на стороны грани, в которой оно лежит; пусть a_i и b_i — длины двух проекций звена l_i. Оценим сумму длин этих проекций.

Рассмотрим проекции ломаной на вертикальное направление (параллельное ребру куба). Поскольку ломаная замкнута и проходит как по верхней, так и по нижней граням куба, сумма длин этих проекций не меньше двух. То же самое верно

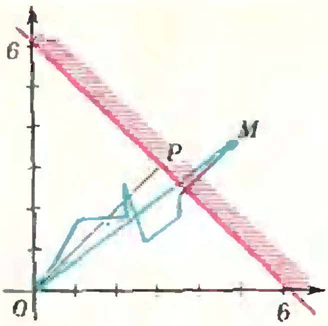


Рис. 3.

и для двух других направлений, параллельных ребру куба. Значит, сумма всех длин проекций не меньше шести. А эта сумма равна как раз сумме всех a_i и b_i ($i=1, \ldots, k$), так что

$$a_1+a_2+\ldots+a_k+b_1+b_2+\ldots+b_k \geq 6. \qquad (1)$$

Докажем, что из (1) вытекает нужное нам неравенство:

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\ldots+\sqrt{a_k^2+b_k^2} \geq 3\sqrt{2}. \qquad (2)$$

Это можно сделать алгебраически, но мы приведем простое геометрическое доказательство.

Построим на координатной плоскости ломаную из k звеньев, длины проекций i-го звена которой равны a_i и b_i ($i=1, 2, \ldots, k$), с началом в точке O (0;0) (рис. 3). Из (1) следует, что конец M $(a_1+\ldots+a_k;\ b_1+\ldots+b_k)$ этой ломаной лежит выше прямой $a+b=6$ (или на этой прямой). Расстояние от точки O до этой прямой равно $3\sqrt{2}$. Ясно, что длина любой ломаной, соединяющей точки O и M, *не меньше* $3\sqrt{2}$ — это и есть неравенство (2). Заметим, что оценка $3\sqrt{2}$ — точная. Она достигается для сечения куба, перпендикулярного его диагонали и имеющего форму шестиугольника.

Н. Васильев

◆

М418. *Докажите, что для любого натурального $n \geq 2$ выполняются неравенства:*

$$n\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right) < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} < n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)+1.$$

Для доказательства мы воспользуемся *теоремой Коши* о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа. Тогда

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

причем равенство достигается лишь в случае, когда все числа равны.

Запишем теорему Коши для чисел $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n-1}{n}$:

$$\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{n-1}{n}}{n} > \sqrt[n]{\frac{1}{n}}.$$

Перепишем это неравенство так:

$$1-\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(1-\frac{1}{n}\right) > \frac{n}{\sqrt[n]{n}}.$$

Отсюда получаем одно из нужных нам неравенств:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} < n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)+1.$$

Чтобы доказать второе неравенство, запишем теорему Коши для чисел $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{n+1}{n}$:

$$\frac{2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\ldots+\frac{n+1}{n}}{n} < \sqrt[n]{n+1},$$

или

$$2+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right) > n\sqrt[n]{n+1},$$

откуда

$$n+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)>n\sqrt[n]{n+1},$$

то есть

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}>n\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right).$$

Л. Курляндчик

◆

М419. *В круге радиуса 16 расположено 650 точек. Докажите, что найдется кольцо с внутренним радиусом 2 и внешним радиусом 3, в котором лежит не меньше 10 из данных точек.*

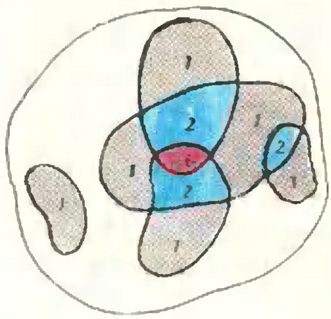


Рис. 4.

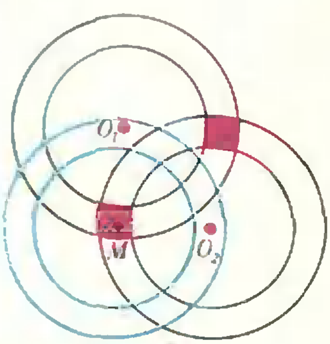


Рис. 5.

Прежде чем решать эту задачу, докажем такое вспомогательное утверждение. Пусть фигура S площади s содержит фигуры $S_1, \ldots, S_l$ площади $s_1, \ldots, s_l$, такие, что каждая точка фигуры S покрыта не более чем k фигурами S_i. Тогда $\sum s_i = s_1+s_2+\ldots+s_l \leqslant ks$. В самом деле, рассмотрим фигурки T_j, получающиеся при пересечении фигур S_i (рис. 4); на каждой из фигурок T_j напишем число, показывающее, скольким S_i она принадлежит. Очевидно, что $\sum t_j \leqslant s$ (t_j — площадь фигурки T_j). С другой стороны, не менее очевидно, что $\sum s_i \leqslant k\sum t_j$ (k — максимально возможное число пересечений S_i). Отсюда получаем, что $\sum s_i \leqslant ks$.

Вернемся к нашей задаче.

Опишем вокруг каждой данной точки кольцо с внутренним радиусом 2 и внешним — 3; всего 650 колец. Докажем, что среди них обязательно найдется не менее десяти пересекающихся.

Возьмем объединение этих 650 колец; они как-то расположены в круге радиуса $16+3=19$. Допустим, что каждая точка этого круга покрывается не более чем девятью кольцами, и покажем, что это приводит к противоречию. Для этого посчитаем площади.

Площадь круга радиуса 19 равна $S=361\pi$. Площадь одного кольца $s=5\pi$, так что площадь всех 650 колец равна $650\cdot 5\pi=3250\pi$. Если кольца пересекаются не более чем по 9, то согласно утверждению, доказанному выше,

$$\sum s = 3250\pi \leqslant 9S = 9\cdot 361\pi = 3249\pi$$

— противоречие.

Итак, мы доказали, что найдется не менее десяти пересекающихся колец.

Отсюда следует утверждение задачи. Действительно, если есть д в а пересекающихся кольца внутреннего радиуса 2 и внешнего 3 с центрами O_1 и O_2, то любая точка M, принадлежащая их пересечению, удалена от точек O_1 и O_2 на расстояние ρ: $2\leqslant\rho\leqslant 3$; так что точки O_1 и O_2 попадают в нужное нам кольцо с центром M (рис. 5). В кольце же (радиусов 2 и 3) с центром в любой точке из н е п у с т о г о (!) пересечения не менее десяти колец будет лежать не менее десяти данных точек — центров этих пересекающихся колец.

И. Климова

◆

Ф428. *Сфера радиуса $R=0{,}5$ м вращается вокруг ее вертикального диаметра с постоянной угловой скоростью $\omega=5$ рад/сек (рис. 6). Вместе со сферой на ее внутренней поверхности вращается небольшое тело, находящееся на высоте, равной половине радиуса.*
1) Определить минимальное значение коэффициента трения, при котором это состояние возможно.

Рассмотрим силы, действующие на тело в положении равновесия (рис. 7). Со стороны сферы на тело действует сила $\vec{F}_1$ — равнодействующая силы нормальной реакции $\vec{N}$ и силы трения $\vec{F}_{тр}$, касательной к поверхности сферы. Направление силы трения (вверх или вниз по касательной) зависит от того, выше или ниже находится положение равновесия тела в отсутствие трения. Однако во всех случаях

$$|\vec{F}_{тр}|\leqslant\mu|\vec{N}|.$$

Это означает, что сила $\vec{F}_1$ направлена так, что тангенс угла β,

2) Определить минимальное значение коэффициента трения, если угловая скорость сферы равна 8 рад/сек.
3) Исследовать устойчивость состояний в случае вышенайденных значений коэффициента трения при: а) малых изменениях положения тела; б) малых изменениях угловой скорости сферы.

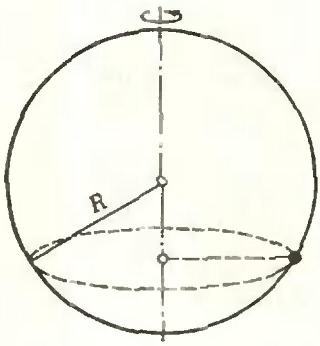


Рис. 6.

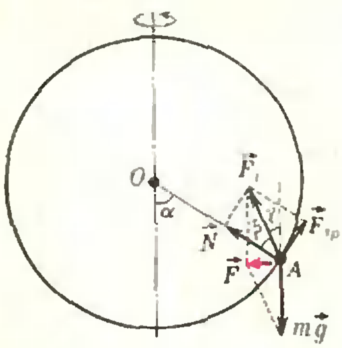


Рис. 7.

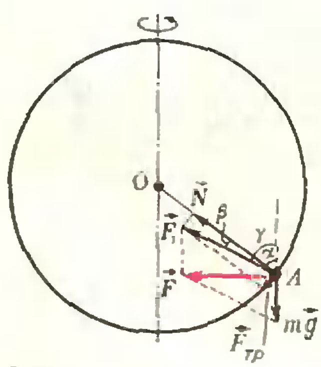


Рис. 8.

который образует эта сила с радиусом OA, не превышает μ:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{|\vec F_{тр}|}{|\vec N|} \leqslant \mu.$$

Следовательно, коэффициент трения можно найти, определив угол β.

Кроме силы $\vec F_1$ на тело действует еще сила тяжести $m\vec g$. Поскольку тело движется по окружности радиуса r, равнодействующая $\vec F$ сил $\vec F_1$ и $m\vec g$ направлена горизонтально и равна по абсолютной величине $m\omega^2 r$:

$$\vec F = \vec F_1 + m\vec g, \quad |\vec F| = m\omega^2 r.$$

Обозначим через α угол между радиусом OA и вертикалью, а через γ — угол между направлением силы $\vec F_1$ и вертикалью (см. рис. 7). Тогда

$$\beta = \alpha - \gamma,$$

и

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha-\gamma) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\gamma}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma}. \qquad (1)$$

Но $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{m\omega^2 r}{m|\vec g|}$, где $r = R\sin\alpha$, а $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{R^2 - R^2/4}}{R} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то есть $\alpha = 60°$. Тогда из выражения (1)

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \dfrac{\omega^2 R\sin\alpha}{|\vec g|}}{1+\operatorname{tg}\alpha\dfrac{\omega^2 R\sin\alpha}{|\vec g|}}. \qquad (2)$$

Подставляя сюда $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}60° = \sqrt{3}$, $\omega = 5$ *рад/сек*, $R = 0{,}5$ *м* и $|\vec g| = 10$ *м/сек*^{2}, получим

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{3\sqrt{3}}{23},$$

и

$$\mu \geqslant \operatorname{tg}\beta = \frac{3\sqrt{3}}{23} \approx 0{,}23.$$

При $\omega = 8$ *рад/сек* получаем

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{3\sqrt{3}}{29}.$$

Знак «минус» означает, что $\gamma > \alpha$ и, следовательно, сила $\vec F_1$ проходит левее радиуса OA, а сила трения направлена вниз по касательной (рис. 8). При этом

$$\mu \geqslant |\operatorname{tg}\beta| = \frac{3\sqrt{3}}{29} \approx 0{,}18.$$

Теперь рассмотрим вопрос об устойчивости равновесия тела. Мы показали, что тело находится в равновесии, если угол β не превышает значения $\operatorname{arctg}\mu$. Пусть угловая скорость возросла на небольшую величину. Это означает, что возрастает центростремительное ускорение, а сила $\vec F_1$ при этом поворачивается. Причем в первом случае (когда $\omega = 5$ *рад/сек*) сила $\vec F_1$ поворачивается так, что угол β уменьшается. Следовательно, тело остается в равновесии. При небольшом уменьшении ω угол β должен возрасти. Но это невозможно. Следовательно, тело уже не сможет находиться в прежнем положении и соскользнет вниз. При этом уменьшится угол α, так что угол β сможет стать таким, чтобы $\operatorname{tg}\beta \leqslant \mu$. Таким образом, тело придет в новое положение равновесия. Во втором случае (при $\omega=8$ *рад/сек*) реакция тела на малые изменения ω противоположная (покажите это самостоятельно).

Несколько сложнее исследовать вопрос об устойчивости равновесия при изменении положения тела. Сначала проведем качественные рассуждения. В первом случае ($\omega=5$ *рад/сек*) равновесное положение тела находится выше положения равновесия в отсутствие трения (так как сила трения направлена вверх). Поэтому ясно, что при смещении тела вниз тело останется в новом положении, а при смещении вверх — вернется в прежнее положение. Во втором случае ($\omega=8$ *рад/сек*) будет все наоборот.

Вопрос об устойчивости равновесия при изменениях положения тела можно решить и более строго. Для этого надо выяснить, как меняется $\operatorname{tg}\beta$ при малых отклонениях тела от положения равновесия, например, при изменениях угла α. Это можно сделать, исследуя производную выражения для $\operatorname{tg}\beta$ (формула (1)) по α. Например, если производная положительна при увеличении α, значит, $\operatorname{tg}\beta$ возрастает. А это, как мы уже говорили, означает, что тело должно вернуться в прежнее состояние. И так далее. Тем, кто это умеет делать, мы советуем довести до конца все необходимые выкладки и подтвердить наши качественные рассуждения.

◆

Ф429. *Стенки цилиндра, поршень и внутренняя перегородка площадью 1 дм² изготовлены из теплоизоляционного материала (рис. 9). Клапан в перегородке открывается в том случае, если давление справа больше давления слева. В начальном состоянии в левой части цилиндра длиной $l=11{,}2$ дм находится $m_1=12$ г гелия, в правой части, имеющей ту же длину, — $m_2=2$ г гелия; с обеих сторон температура равна $t_0=0°C$ ($T_0=273$ °K). Внешнее давление $p_0=10^5$ н/м². Удельная теплоемкость гелия при постоянном объеме $c_V=3{,}15\cdot10^3$ дж/(кг·град), а при постоянном давлении $c_p=5{,}25\cdot10^3$ дж/(кг·град). Поршень медленно передвигается по направлению к перегородке (с небольшой остановкой в момент открытия клапана) и осторожно доводится до перегородки. Чему равна произведенная при этом работа? Площадь поршня $S=10^{-2}$ м².*

Поскольку система теплоизолирована, полная работа A, совершенная над газом силой, действующей на поршень, и силой атмосферного давления, равна изменению внутренней энергии газа ΔU:

$$A=\Delta U.$$

Обозначим через T окончательную температуру газа. Тогда

$$\Delta U=c_V(m_1+m_2)(T-T_0).$$

Чтобы найти работу A_1 силы, приложенной к поршню, надо из полной работы A вычесть работу силы атмосферного давления $A_2=p_0Sl$. В результате получим

$$A_1=c_V(m_1+m_2)(T-T_0)-p_0Sl. \qquad (*)$$

Из всех входящих в это выражение величин нам не известна лишь температура T по окончании процесса. Найдем ее. Для этого нам придется последовательно рассмотреть все этапы процесса.

Ясно, что в самом начале давление в левой части цилиндра больше, чем в правой:

$$p_1=\frac{m_1}{\mu}\,\frac{RT_0}{lS}>p_2=\frac{m_2}{\mu}\,\frac{RT_0}{lS}.$$

Поэтому при движении поршня к перегородке газ в правой части цилиндра будет сжиматься до тех пор, пока его давление не станет равным p_1 и не откроется клапан в перегородке. Так как сжатие газа происходит адиабатно, его объем V_1 после сжатия станет таким, что

$$p_1V_1^\gamma=p_2V_0^\gamma,$$

где $\gamma=\dfrac{c_p}{c_V}$ — показатель адиабаты, а $V_0=lS$ *). Отсюда

$$V_1=V_0\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}=V_0\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Температуру T_1, которую будет иметь при этом газ в правой

*) Для адиабатного процесса справедливы такие соотношения между параметрами газа: $TV^{\gamma-1}=\mathrm{const}$ (см., например, статью В. Кресина «Адиабатный процесс», «Квант», 1977, № 6); $pV^\gamma=\mathrm{const}$; $pT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}=\mathrm{const}$.

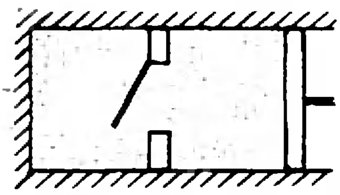


Рис. 9.

части цилиндра, найдем из уравнения газового состояния:

$$T_1 = \frac{p_1V_1\mu}{Rm_2} = \frac{p_1V_1}{p_2V_0}T_0 = T_0\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}-1}.$$

Теперь, когда давление справа стало таким же, как и слева, открывается клапан в перегородке, и газы перемешиваются (поршень в это время не перемещается). Температуру «смеси» T_2 можно определить из уравнения теплового баланса:

$$c_V m_1(T_2-T_0)=c_V m_2(T_1-T_2),$$

и

$$T_2 = \frac{m_1T_0+m_2T_1}{m_1+m_2} = T_0\frac{m_1}{m_1+m_2}\left[1+\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right].$$

После перемешивания весь газ массы $m=m_1+m_2$ сжимается адиабатно от объема $V=V_1+V_0$ до объема V_0, а его температура изменяется от T_2 до T. При этом

$$TV_0^{\gamma-1}=T_2V^{\gamma-1},$$

откуда

$$T=T_2\left(\frac{V_1+V_0}{V_0}\right)^{\gamma-1}=T_0\frac{m_1}{m_1+m_2}\left[1+\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^{\gamma}.$$

Подставив это выражение для T в формулу (*), получим окончательно

$$A_1=c_V(m_1+m_2)T_0\left\{\frac{m_1}{m_1+m_2}\left[1+\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^{\gamma}-1\right\}-$$
$$-p_0Sl\approx 3674\ дж.$$

И. Слободецкий

◆

Ф430. *На рисунке 10 показана простейшая схема выпрямителя. Диод считается идеальным: его сопротивление в прямом направлении равно нулю, в обратном — бесконечно велико. Во сколько раз изменится мощность, выделяемая на сопротивлении R, при подсоединении параллельно ему конденсатора C такой емкости, что за период колебаний напряжения сети ($U=220$ в, $f=50$ гц) заряд конденсатора практически не меняется?*

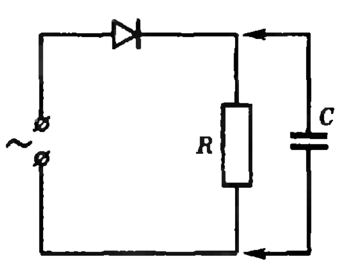


Рис. 10.

Если сопротивление R подключено непосредственно к сети переменного тока, то в нем выделяется мощность, равная $\frac{U^2}{R}$, где U — действующее значение напряжения.

В случае, если сопротивление подключено к сети через диод (см. рис. 10), в нем выделяется мощность в 2 раза меньшая (полпериода ток через сопротивление не течет):

$$P_1=\frac{1}{2}\frac{U^2}{R}.$$

Теперь найдем мощность P_2, выделяющуюся в сопротивлении при подсоединении параллельно ему конденсатора. В условии задачи сказано, что за период колебаний напряжения в сети заряд конденсатора практически не меняется. Это означает, что напряжение на конденсаторе можно считать постоянным и равным амплитудному значению U_0. Тогда $P_2=\frac{U_0^2}{R}=\frac{(\sqrt{2}U)^2}{R}=\frac{2U^2}{R}$, поскольку амплитудное значение напряжения больше действующего значения в $\sqrt{2}$ раз.

Отношение мощностей, выделяемых на сопротивлении с подключенным конденсатором и без конденсатора, равно

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{2U^2}{R}\frac{2R}{U^2}=4.$$

Таким образом, при подсоединении конденсатора параллельно сопротивлению в нем выделяется мощность в 4 раза большая.

В. Скороваров

Ф431. *В дифференциальном вороте, схематически изображенном на рисунке 11, используется цепь, каждый метр которой содержит N звеньев. Шкивы верхнего блока снабжены зубцами, которые продеваются в звенья цепи, причем шкив большего диаметра имеет n зубцов, а шкив меньшего диаметра $n-1$. Трение в системе таково, что силы, необходимые для подъема или опускания груза, отличаются в k раз. Предполагая, что трение от направления движения не зависит, найти эти силы.*

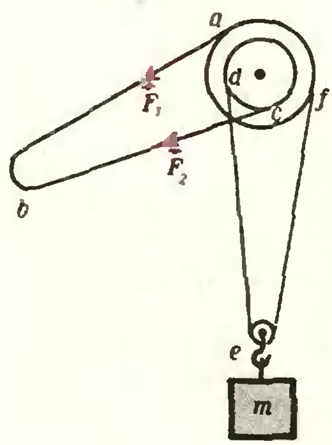


Рис. 11.

Для решения этой задачи воспользуемся законом сохранения энергии. Чтобы поднять или опустить груз, к участку abc цепи ворота надо приложить силу $\vec{F}_1$ или $\vec{F}_2$ соответственно. Эта сила совершает работу, равную сумме изменения потенциальной энергии груза и работы силы трения.

Рассмотрим сначала подъем груза. Под действием силы $\vec{F}_1$ верхний блок поворачивается против часовой стрелки. Предположим, что он совершил один полный оборот. При этом мы, очевидно, протянули n звеньев цепи, то есть точка приложения силы $\vec{F}_1$ совершила перемещение, равное по абсолютной величине длине участка цепи, содержащего n звеньев: $l_1 = \frac{n}{N}$ метров. Работа силы $\vec{F}_1$, следовательно, равна

$$A_1 = |\vec{F}_1|\, l_1 = |\vec{F}_1| \frac{n}{N}.$$

За время одного поворота верхнего блока правый участок цепи def, на котором висит груз, поднялся на n звеньев (на число звеньев шкива большего диаметра), а левый участок опустился на $n-1$ звено (на число звеньев меньшего шкива). Таким образом, груз поднялся на $\frac{n-(n-1)}{2}$ звеньев, то есть на высоту $h_1 = \frac{1}{2N}$ метров, а его потенциальная энергия увеличилась на

$$\Delta\Pi_1 = m|\vec{g}|\, h_1 = m|\vec{g}| \frac{1}{2N}$$

(m — масса груза). Обозначим через $A_{\text{тр}}$ работу силы трения. Тогда согласно закону сохранения энергии

$$|\vec{F}_1| \frac{n}{N} = m|\vec{g}| \frac{1}{2N} + A_{\text{тр}}. \qquad (1)$$

Пусть теперь верхний блок под действием силы $\vec{F}_2$ сделает один полный оборот по часовой стрелке. При этом сила $\vec{F}_2$ совершит работу

$$A_2 = |\vec{F}_2|\, l_2 = |\vec{F}_2| \frac{n-1}{N},$$

потенциальная энергия груза изменится на величину

$$\Delta\Pi_2 = -m|\vec{g}|\, h_2 = -m|\vec{g}| \frac{1}{2N},$$

а работа силы трения останется такой же, как и в первом случае (поскольку абсолютная величина перемещения та же самая, а от направления движения трение не зависит). Поэтому можно записать

$$|\vec{F}_2| \frac{n-1}{N} = -m|\vec{g}| \frac{1}{2N} + A_{\text{тр}}. \qquad (2)$$

Кроме того, по условию задачи

$$|\vec{F}_1| = k|\vec{F}_2| \qquad (3)$$

Решая систему уравнений (1)—(3), найдем

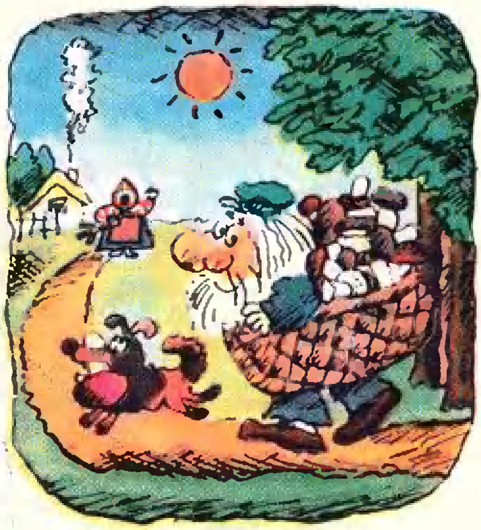
$$|\vec{F}_1| = m|\vec{g}| \frac{k}{n(k-1)+1},$$

$$|\vec{F}_2| = m|\vec{g}| \frac{1}{n(k-1)+1}.$$

И. Слободецкий

«Квант» для младших школьников

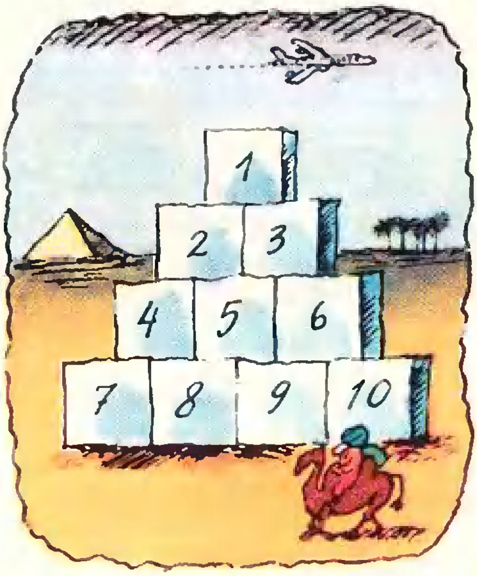
Задачи



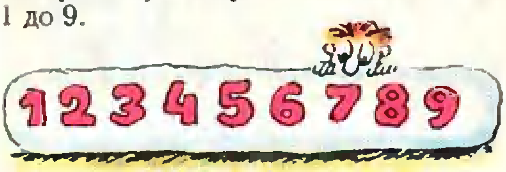
1. Однажды грибов я набрал! — еле дотащил. Но тащил-то почти одну воду — в свежих грибах ее 90%. А когда грибы высушили, они стали на 15 кг легче — теперь в них было 60% воды.

Сколько грибов я принес из леса?

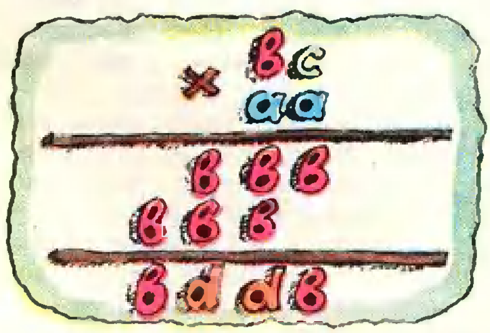
2. Переложите пирамиду из десяти кубиков (см. рисунок) так, чтобы ее форма осталась прежней, но каждый кубик соприкасался только с новыми кубиками.



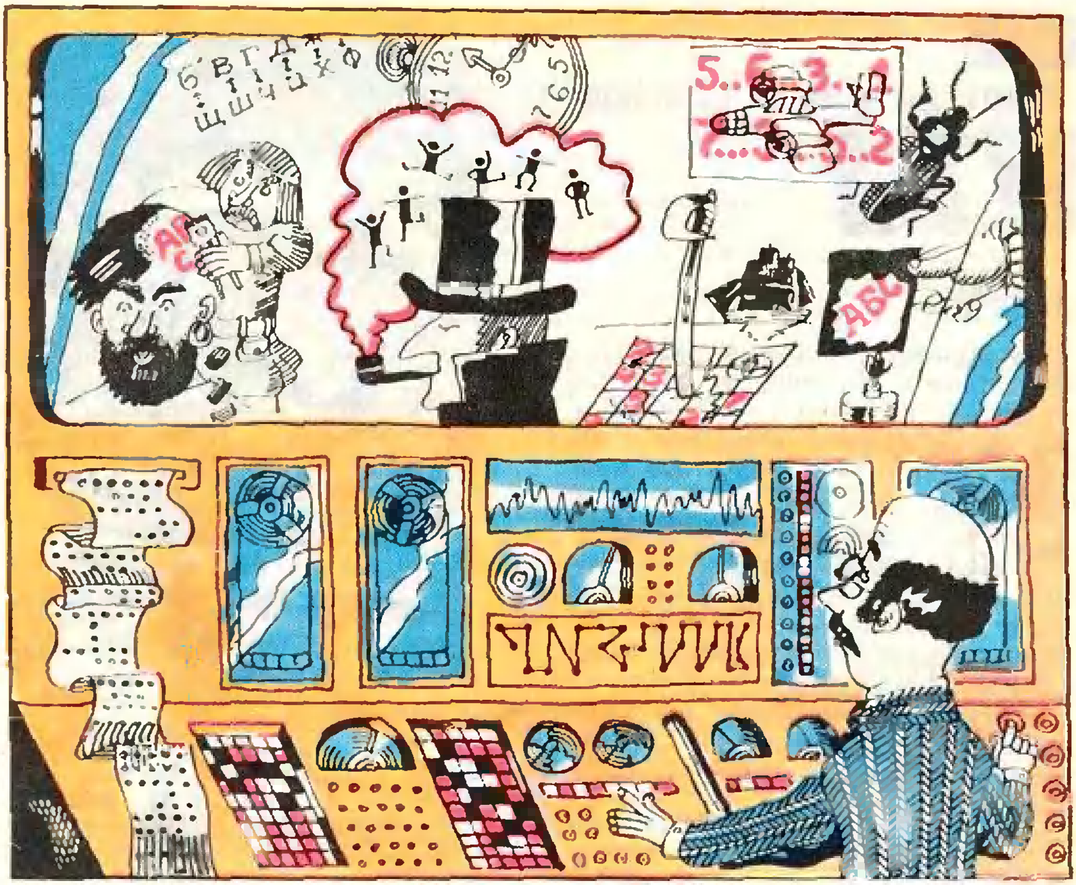
3. Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 36, в записи которого участвуют все цифры от 1 до 9.



4. В примере на умножение одинаковые цифры заменили одинаковыми буквами, разные — разными. То, что получилось, изображено на рисунке. Восстановите первоначальный вид примера.



5. Деревни A, B и C расположены в вершинах правильного треугольника. В деревне A живет 30 школьников, в деревне B — 20, в деревне C — 10. Где нужно построить школу, чтобы суммарное расстояние, которое проходят школьники от дома до школы, было наименьшим?



Н. Виленкин

Математика и шифры

> *— То, что изобретено одним человеком, может быть понято другим, — сказал Холмс.*
>
> Артур Конан Дойль. «Пляшущие человечки».

Тарабарская грамота

Издавна люди изыскивали способы уберечь сообщения от посторонних глаз. Один древний царь, например, обрил голову гонца, написал на ней послание и отослал к своему союзнику гонца лишь тогда, когда волосы на его голове отросли. Развитие химии дало более удобное средство: симпатические чернила, записи которыми не видны до тех пор, пока бумагу не нагреют или обработают каким-нибудь химикатом. Но чаще всего для тайнописи применяют шифры. Ими пользуются дипломаты, стремящиеся сохранить тайны переговоров, военачальники, скрывающие от противника отданные распоряжения, разведчики и т. д. А в древности ими пользовались пираты, отмечая расположение кладов, алхимики, купцы, заговорщики и многие другие.

Сначала шифры были очень несложными. Например, русские дипломаты XV—XVI веков применяли так называемую «тарабарскую грамоту», в которой все гласные буквы оставались неизменными, а согласные заменялись друг на друга по следующей схеме:

б в г д ж з к л м н
↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕
щ ш ч ц х ф т с р п

(в первой строке согласные идут в обычном порядке, а во второй строке — в обратном). Например, вместо «Великий государь» получалось «Шеситий чолуцамь». Этот шифр очень несложен (можно научиться даже бегло разговаривать на «тарабарской грамоте»).

Постепенно тайнопись усложнялась, но даже шифр, которым пользовалась в конце XVII века царевна Софья в своей переписке с Василием Голицыным, был весьма прост — одно из ее писем было несколько лет тому назад опубликовано в журнале «Наука и жизнь», и многие читатели его расшифровали. Шифрами пользовался и изменник Мазепа. Как пишет в поэме «Полтава» А. С. Пушкин:

«Во тьме ночной они, как воры,
Ведут свои переговоры,
Измену ценят меж собой,
Слагают цифр универсалов...»

Каким должен быть шифр

При шифровании должны выполняться определенные условия. Во-первых, различные буквы должны обозначаться разными знаками — иначе получатель должен будет гадать, какую из нескольких букв обозначает тот или иной знак. Далее, шифр должен быть трудно разгадываем — легкие шифры можно применять лишь при условии, что у противника нет времени на разгадку. Наконец, секретность шифра должна сочетаться со сравнительной несложностью операций кодирования и раскодирования — иначе на них уйдет столько времени, что переданная информация устареет *). А если раскодирование потребует слишком много усилий, то можно оказаться в положении легендарного писца, который писал за плату письма на восточном базаре, но при этом взимал плату еще и как гонец, утверждая, что написанное им никто, кроме него самого, понять не сможет.

Тарабарская грамота относится к шифрам, в которых каждая буква заменяется определенным знаком — другой буквой, цифрой или изображением. Таким же образом шифровали свои послания чикагские бандиты в рассказе Конан Дойля «Пляшущие человечки» и пираты в повести Эдгара По «Золотой жук» (только пираты применили еще симпатические чернила). Иногда для того, чтобы затруднить чтение шифра, используют *избыточные коды* — одну и ту же букву обозначают разными знаками. Тогда, даже если противник отгадает значение какого-нибудь знака, он не сможет использовать это при расшифровке другого места текста, так как там та же буква обозначается иначе.

Впрочем, иногда избыточность возникает естественным путем. Когда специалисты по древним языкам стали расшифровывать надписи, сделанные много тысяч лет тому назад карийцами (народом, жившим в Малой Азии), они обнаружили, что число знаков слишком велико для буквенной азбуки. Поэтому они решили, что некоторые знаки означают отдельные буквы, а некоторые — слоги. Однако на этом пути возникли непреодолимые трудности. И только когда советский ученый В. В. Шеворошкин стал смотреть, в каких местностях встречаются те или иные знаки (а многие карийцы служили наемниками в Египте и других государствах и оставили там свои надписи), то выяснилось, что в каждой местности применялось не более трех десятков различных знаков, то есть письменность была все же буквенной. Только в разных местах некоторые буквы изображались по-разному, что и затруднило разгадку карийских надписей.

Шифры и комбинаторика

Поскольку множество различных знаков, применяемых в данном шифре, является конечным, его элементы можно перенумеровать и вместо самих знаков использовать их номера. Будем для простоты рассматривать шифры, в которых нет избыточности. Тогда число знаков равно числу букв в алфавите, а также таких знаков, как пробел между словами, точка, запятая. Для русского языка можно обойтись 35 знаками: 31 буква (*е*, *ё*, и *ь*, *ъ* не различаются), пробел, точка, запятая, тире. Если число знаков, используемых при шифро-

*) Впрочем, теперь эти операции можно поручить ЭВМ.

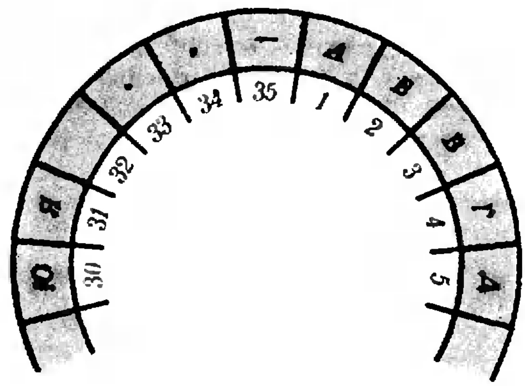
вании, тоже равно 35, то каждый такой шифр задается взаимно-однозначным отображением одного множества из 35 элементов на другое такое же множество. В комбинаторике доказывается, что число таких отображений равно 35!, то есть произведению натуральных чисел от 1 до 35. Это настолько громадное число, что его трудно себе представить, — оно примерно равно 10^{40}.

Иметь дело с произвольными отображениями f множества букв алфавита и знаков препинания $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{35}\}$ на множество знаков шифра $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{35}\}$ не слишком удобно: запомнить такое отображение трудно, а хранить при себе таблицу отображения — «ключ» шифра — нежелательно. Лучше иметь какое-нибудь простое правило, позволяющее по k найти $f(k)$. А такие правила дают методы математики — ведь нет ничего лучшего для распутывания всяких сложностей, чем использование математических методов.

Шифры и сравнения

Математика издавна применялась в теории шифров. Еще в конце XVI века расшифровкой переписки между противниками французского короля Генриха III занимался один из создателей современной алгебры Франсуа Виет. А английские монархистские заговорщики в XVII веке поражались быстроте, с которой Кромвель проникал в их замыслы. Они думали, что используемые ими шифры невозможно разгадать, и считали, что ключи к ним выдал кто-то из участников заговора. Лишь после падения республики и воцарения Карла II узнали, что все эти шифры разгадывал один из лучших математиков того времени профессор Оксфордского университета Валлис, который считал себя основателем новой науки — *криптографии*.

Один из методов кодирования заключается в следующем. Разделим кольцо на 35 конгруэнтных частей, занумеруем их и пометим каждую буквой или знаком препинания (см. рисунок). А теперь выберем какое-нибудь число a («ключевое число»



шифра) и повернем кольцо вокруг центра по часовой стрелке так, чтобы каждая часть переместилась на a шагов. Это и задает шифр—отображение множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{35}\}$ на множество знаков шифра $B = \{01, 02, \ldots, 35\}$ (перед однозначными числами надо писать 0, иначе неясно, что такое 15 — «пятнадцать» или «один», «пять»).

Например, если $a = 11$, то часть, помеченная числом 01, перейдет в часть, помеченную числом 12, а это значит, что букве «*А*» при кодировании отвечает число 12. Точно так же букве «*В*» отвечает число 14 и так далее.

В результате получается послание, в котором каждая буква или знак записаны двузначным числом. Адресату для расшифровки надо разбить полученную последовательность цифр на двузначные числа, вычесть из каждого ключевое число и заменить полученное число k — номер знака a_k — на букву алфавита или знак препинания.

Впрочем, на самом деле правила кодирования и раскодирования не столь просты — ведь если k больше, чем 24, то сумма $k+11$ больше, чем 35, а в множестве B самое большое число равно 35. Но здесь надо вспомнить, что мы писали числа не на прямой, а на кольце, а, как известно, у кольца начала нет и нет конца — за числом 35 идет 1. Иными словами, после числа 35 все повторяется снова. Это значит, что, получив сумму, превосходящую 35, надо вычесть из нее 35. Полученная разность и покажет, в какое число переходит a_k. Например, a_{27} (буква «ы») переходит не в число 38, а в 03, a_{32} («пробел») — в 08 и так далее. Таким образом,

$$f(a_k)=\begin{cases} k+11, \text{ если } k\leqslant 24, \\ k-24, \text{ если } 25\leqslant k\leqslant 35. \end{cases}$$

А раскодирование делается по следующим формулам:

$$g(n)=\begin{cases} a_{n-11}, \text{ если } 12\leqslant n\leqslant 35, \\ a_{n+24}, \text{ если } 1\leqslant n\leqslant 11. \end{cases}$$

Правило кодирования можно записать более компактно, если сложение понимать в особом смысле.

Разобьем все целые числа на классы, отнеся к одному классу числа, дающие одинаковые остатки при делении на 35. Например, в один и тот же класс попадут числа —32, 3, 38, 73, так как все они при делении на 35 дают в остатке 3. Общий вид чисел этого класса $3+35k$, где k — целое число. Обозначим через $\mathbf{Z}_{35}$ множество таких классов. Число различных классов равно 35 (при делении на 35 получаются остатки 0, 1, 2, ..., 34), и их можно обозначать теми же цифрами, что и соответствующие остатки, только писать сверху черточку. Например $\overline{5}$ означает не число 5, а класс, содержащий это число, то есть множество чисел $\{..., -30, 5, 40, 75, ...\}$. В частности, $\overline{0}$ означает класс, содержащий число 35.

Теперь уже можно написать, что $\overline{27}+\overline{11}=\overline{3}$, то есть, прибавляя 11 к числам класса $\overline{27}$, мы получаем числа из класса $\overline{3}$. Значит, если номерами кодируемых букв и знаками шифра считать классы из $\mathbf{Z}_{35}$, то формулы кодирования и раскодирования можно записать так:

$$f(a_{\overline{k}})=\overline{k}+\overline{11},$$

$$g(\overline{n})=a_{\overline{n}-\overline{11}}.$$

Такая «арифметика остатков» полезна и во многих других вопросах. Пусть, например, сейчас минутная стрелка показывает 25 минут. Каким будет ее положение через 176 минут? Чтобы ответить на этот вопрос, достаточно заметить, что через каждые 60 минут стрелка возвращается в исходное положение. Поэтому надо найти остаток от деления суммы $25+176=201$ на 60. Получим, что этот остаток равен 21. Значит, стрелка будет показывать 21 минуту.

Для облегчения сложения и вычитания в арифметике остатков при делении на m надо составить таблицу сложения. С этой целью берут обычную таблицу сложения и заменяют каждое число его остатком при делении на m.

Такую арифметику обычно называют *арифметикой по модулю m*, а числа, имеющие одинаковые остатки при делении на m, называют *сравнимыми по модулю m*. Если a и b сравнимы по модулю m, то пишут

$$a\equiv b \pmod m.$$

Например,

$$215\equiv 40 \pmod 7,$$

так как и 215, и 40 при делении на 7 дают остаток 5.

Если уже известно, что шифр получен прибавлением одного и того же числа к номерам букв, то его можно разгадать, угадав значение хотя бы одной буквы, а еще лучше — нескольких букв. Например, если известно, что в письме речь идет о Москве и в нем часто встречается сочетание «УХШСЙЗ», то легко догадаться, что при шифровании номер каждой буквы увеличивали на 7.

Более сложный шифр получается, если заменить сложение умножением. Будем, например, умножать номера всех букв на 2. Конечно, если произведение окажется больше 35, надо заменять его остатком от деления на 35. Например, буква «Ч» получит при шифровке номер 13, так как номер буквы «Ч» равен 24, а при делении $24\cdot 2=48$ на 35 получается остаток 13. Это преобразование запутаннее, чем сложение, и можно опасаться, что разные буквы при кодировании перейдут в одну и ту же букву. Но, к счастью, в данном случае этого не происходит — код невырожден. Доказательство этого утверждения основано на том, что произведение двух чисел делится на 2 лишь в случае, когда один из множителей четен. А если бы мы попробовали умножать номера букв не на 2, а на 5 (делитель числа 35), то получился бы вырожденный код (проверьте это сами!). Интересные коды получаются при замене умножения возведением в степень. Вопрос о том, какой получится в этом случае код, связан с проблемами теории чисел.

Шифры и статистика

Мы рассмотрели различные шифры, связанные с арифметическими операциями над номерами букв. У всех этих шифров есть один существенный недостаток — каждая буква переходит в один и тот же знак, где бы эта буква ни стояла в письме. Для расшифровки таких кодов можно применить методы математической статистики. Каждой букве русского алфавита и знаку пробела соответствует определенная частота, с которой они (в среднем) встречаются в длинных текстах:

«пробел»	0,175	Р	0,040	Я	0,018	Х	0,009
О	0,090	В	0,038	Ы	0,016	Ж	0,007
Е, Ё	0,072	Л	0,035	З	0,016	Ю	0,006
А	0,062	К	0,028	Ь, Ъ	0,014	Ш	0,006
И	0,062	М	0,026	Б	0,014	Ц	0,004
Т	0,053	Д	0,025	Г	0,013	Щ	0,003
Н	0,053	П	0,023	Ч	0,012	Э	0,003
С	0,045	У	0,021	Й	0,010	Ф	0,002

Поэтому можно взять расшифровываемое послание, подсчитать для каждого знака частоту, с которой он встречается, и на этом основании судить, что этот знак означает. Например, знак, попадающийся чаще всего, имеет много шансов оказаться пробелом. Ну, а если не пробел, то, возможно, «О» (эта буква стоит на втором месте). Можно изучать и комбинации соседних знаков — чаще всего рядом с гласной буквой стоит согласная. Даже в не слишком длинном тексте можно без труда отделить знаки для согласных букв от знаков для гласных. Такие соображения облегчают разгадку кодов, основанных на простой замене букв знаками.

Сравнительно просто разгадываются и шифры, основанные на перестановке по тому или иному правилу букв послания.

Чтобы усложнить разгадку, применяют шифры «по книге» — числа кода означают номера строк и букв на определенной странице некоторой книги, причем номер страницы можно менять в зависимости от даты составления послания. В этом случае, не зная, какая книга легла в основу шифрования, раскрыть тайну кода очень трудно.

Сейчас для составления и разгадки шифров применяют электронные вычислительные машины. Во время второй мировой войны, когда ЭВМ еще не было, для кодирования и раскодирования применялись механические шифровальные машины. В разгадке кода, употреблявшегося тогда фашистскими шифровальщиками, большую роль сыграл выдающийся английский математик и логик Алан Тьюринг, один из создателей так называемой *теории алгоритмов*.

Задачи наших читателей

1. Функция f определена и непрерывна на всей числовой прямой. Про эту функцию известно, если $x_2 - x_1$ — число рациональное, то и $f(x_2) - f(x_1)$ — число рациональное. Доказать, что $f(x) = kx + b$, причем k рационально.

Примечание. Напомним два свойства непрерывных функций, которые могут пригодиться при решении этой задачи:

а) сумма и разность двух непрерывных функций — функции непрерывные;

б) если $a<c<b$ и непрерывная функция принимает значения a и b, то она принимает и значение c.

В. Произволов
(г. Москва)

2. Существуют ли четыре натуральных числа, сумма которых равна их произведению?

С. Сефибеков
(село Кашкент Даг АССР)

3. В кубе провели все диагонали (внутри куба и во всех гранях). Сколькими способами среди проведенных 16 отрезков можно выбрать пару взаимно перпендикулярных?

В. Федотов
(г. Петрозаводск)

Квадратриса и кохлеоида

Квадратрису Динострата можно определить как график функции

$$y = \begin{cases} x \cdot \operatorname{ctg} \dfrac{\pi x}{2a}, & \text{если } x \neq 0, \\ \dfrac{2a}{\pi}, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Кривая симметрична относительно оси ординат и состоит из бесконечного множества ветвей. Прямые $x = 2ka$ ($k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$) являются ее вертикальными асимптотами (рис. 1).

В полярной системе координат, полюс которой совпадает с началом декартовой системы, а полярная ось направлена по положительному лучу оси о р д и н а т, квадратриса запишется уравнением

$$\rho = \begin{cases} \dfrac{2a}{\pi} \cdot \dfrac{\varphi}{\sin \varphi}, & \text{если } \varphi \neq 0, \\ \dfrac{2a}{\pi}, & \text{если } \varphi = 0. \end{cases}$$

Древние, не владея координатным методом, определяли квадратрису Динострата кинематически и имели представление лишь о той ее части, которая соответствует отрезку $[-a; a]$.

Рассмотрим это «механическое» определение. Пусть одновременно отрезок OA равномерно вращается против часовой стрелки вокруг полюса O и отрезок AB равномерно перемещается влево, причем $|OA| = |AB| = a$ и скорости вращения и перемещения таковы, что оба отрезка одновременно достигают полярной оси OC. Тогда множество $\{M\}$ точек пересечения отрезков OA и AB, занимающих соответствующие положения, и образует «кусок» квадратрисы Динострата (рис. 2).

В самом деле, если отрезок OA повернулся так, что $\widehat{COA'} = \varphi$, и $|OM| = \rho$, то $|AM'| = a - \rho \sin \varphi$. По

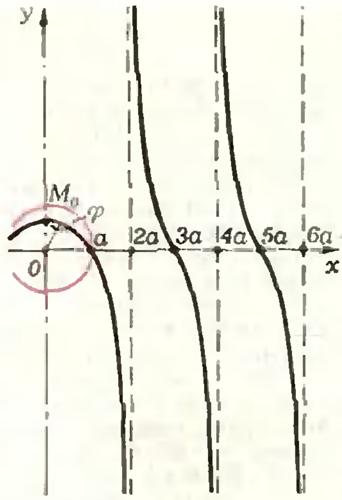


Рис. 1.

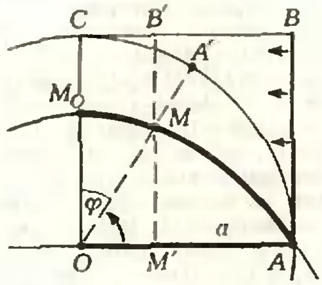


Рис. 2.

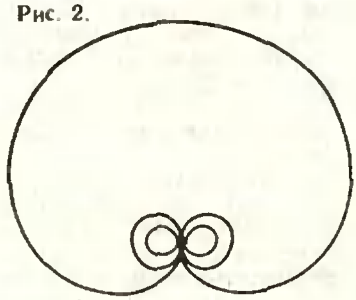


Рис. 3.

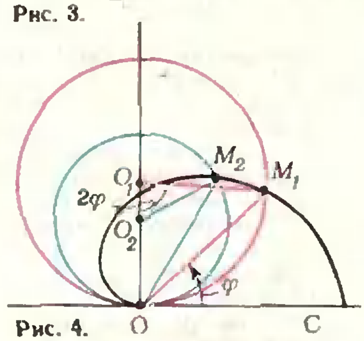


Рис. 4.

определению $\dfrac{|AM'|}{\frac{\pi}{2} - \varphi}$ — постоянная величина. При $\varphi = 0$ $|AM'| = a$. Значит, $\dfrac{a - \rho \sin \varphi}{\frac{\pi}{2} - \varphi} = \dfrac{a}{\frac{\pi}{2}}$, откуда

$$\rho = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{\varphi}{\sin \varphi}.$$

Проверьте, годится ли «механическое» определение квадратрисы для других значений φ.

Построив квадратрису, вы получите отрезок OM_0 длины $\dfrac{2a}{\pi}$. Из отрезков длин a и $\dfrac{2a}{\pi}$ легко построить циркулем и линейкой отрезок длины π, что решает задачу о квадратуре круга. С помощью квадратрисы Динострата можно решить и задачу о трисекции угла. Сделайте это!

Кохлеоида получается из квадратрисы Динострата в результате инверсии относительно окружности (O, a). Значит, ее полярное уравнение $\rho = \dfrac{\pi a}{2} \cdot \dfrac{\sin \varphi}{\varphi}$.

Центральная ветвь квадратрисы дает наружный замкнутый участок кохлеоиды, похожий на яблоко. Боковые ветви дают внутренние «петельки» (рис. 3). Сообразите, во что переходят асимптоты квадратрисы.

Опишем еще один способ построения дуги кохлеоиды. Рассмотрим окружности радиуса $r \geqslant \dfrac{a}{4}$, касающиеся данной прямой в точке O. Отложим на каждой из них от точки O против часовой стрелки дугу длины $\dfrac{\pi a}{2}$. Множество $\{M\}$ концов этих дуг — дуга кохлеоиды. В самом деле, если $\widehat{COM_1} = \varphi$ и $|OM_1| = \rho$ (рис. 4), то $\widehat{OO_1M_1} = 2\varphi$ (O_1 — центр «красной» окружности), но $\widehat{OO_1M_1} = \dfrac{\smile OM}{|OO_1|}$; поскольку по построению $\smile OM_1 = \dfrac{\pi a}{2}$ и $|OM_1| = 2\,|OO_1| \sin \varphi$, получаем

$$\rho = 2\,\frac{\frac{\pi a}{2}}{2\varphi} \sin \varphi = \frac{\pi a}{2} \cdot \frac{\sin \varphi}{\varphi}.$$

В. Березин

Новые книги

В этом номере мы помещаем краткие аннотации на книги по математике и физике, выходящие в III квартале 1977 года и представляющие интерес для наших читателей.

Математика

Издательство «Наука»

1. Игнатьев Е. И. *В царстве смекалки*, в 3-х книгах, книга 1. Объем 10 л., тираж 200 000 экз., цена 33 к.

Книги Игнатьева, впервые увидевшие свет в 1908 году, имели огромный успех и впоследствии неоднократно переиздавались. Они произвели настоящий переворот во всем преподавании школьной и внешкольной математики. Эти книги — не «методика», не «учебник» и не «задачник» в обыкновенном смысле слова: задачи, собранные в них,— занимательного характера, и их можно отнести к разряду «математических игр и развлечений».

Книга разбита на однородные разделы, содержащие задачи в порядке возрастания их трудности. Среди задач — арифметические, комбинаторные, головоломки, задачи, связанные с перекладыванием спичек и т. д., задачи геометрического характера, задачи на графы (в частности, известная задача Эйлера о кенигсбергских мостах и всевозможные задачи на переправы) и задачи-шутки.

Нет, вообще говоря, никакой надобности читать и разбираться в таких книгах «подряд». Каждый может для начала взять тот раздел, который его наиболее заинтересует, затем перейти к любому другому и т. д. Поскольку среди задач есть и такие, усвоение и разбор которых не требует почти никакой математической подготовки, эту книгу можно смело рекомендовать для самостоятельного чтения и изучения даже школьникам младших классов. Впрочем, «возраст не ограничен», так как каждый читатель найдет в книге кое-что и для себя.

2-я и 3-я книги будут выпущены в 1978—1979 годах. Предыдущее издание выходило в 1926 году.

2. Рейд К. *Гильберт*. Перевод с англ. Объем 20 л., тираж 30 000 экз., цена 1 р. 24 к.

Книга представляет собой перевод биографии выдающегося немецкого математика Давида Гильберта (1862—1943). Она написана на основе воспоминаний учеников и друзей Гильберта, а также на основе переписки его со своим другом — известным немецким математиком Г. Минковским. Книга живо воспроизводит картину математической жизни Европы конца XIX — первой трети XX века. Ее удачно дополняет перевод статьи Г. Вейля, в которой дается подробный анализ математических работ Гильберта.

Рассчитанная на широкий круг читателей, книга будет интересна любителям математики и людям, интересующимся историей науки.

Издательство «Просвещение»

3. Беляева Э. С., Монахов В. М. *Экстремальные задачи*. Пособие для учащихся. Объем 3 л., тираж 80 000 экз., цена 10 к.

Это пособие предназначено для учащихся старших классов. В нем содержится много задач из разных отраслей науки и техники, решение которых сводится к поиску оптимальных значений некоторой функции. Это — так называемые экстремальные задачи. Задачи такого рода и методы их решения нашли широкое практическое применение и составили новое направление прикладной математики. Настоящее пособие начинается с элементарных задач на отыскание максимума и минимума, с которыми школьники отчасти знакомы по школьному курсу математики, и кончается простейшими задачами линейного программирования.

4. Виленкин Н. Я., Мордкович А. Г. *Пределы*. Пособие для учителей. Объем 4 л., тираж 100 000 экз., цена 15 к.

Понятие предела является одним из основных в новом школьном курсе математики. На его основе вводятся такие важные понятия, как непрерывность, производная, интеграл. У школьников усвоение понятия предела вызывает определенные трудности. Учитывая это, авторы раскрывают это понятие на базе наглядных представлений; последовательно уточняя эти представления, они затем получают строгое определение предела. На основе рассмотрения пределов последовательностей и функций вводятся числовые и степенные ряды и строится теория степенной функции.

Пособие предназначено для старшеклассников и окажет пользу учителям математики.

Издательство «Знание»

5. Пухначев Ю. В. *Учись применять математику* (справочник математических понятий). Объем 8 л., тираж 100 000 экз., цена 24 к.

Автор в интересной и популярной форме знакомит читателя с методами применения математики в тех областях знания, которые еще недавно традиционно считались не поддающимися «математизации»: лингвистика, юриспруденция, планирование и др. В книге содержатся основные понятия математического анализа, теории вероятностей, геометрические модели. Ее с интересом прочтут школьники, а также специалисты, использующие математику в своей практической деятельности.

6. *Физико-математические олимпиады. Сборник*. Объем 8 л., тираж 100 000 экз., цена 24 к.

В этой книге собраны материалы Всесоюзных физико-математических олимпиад. Почти все задачи даны с решениями, большинство решений иллюстрировано.

Книга предназначена для школьников 7—10 классов и может быть использована в работе физико-математических кружков.

Физика

Издательство «Наука»

1. Пинский А. А. *Задачи по физике.* Объем 20 л., тираж 200 000 экз., цена 80 к.

Этот сборник содержит как задачи, относящиеся к традиционным разделам физики, так и задачи по теории относительности, квантовой механике, статистике, волновой и квантовой оптике, атомной и ядерной физике.

Наиболее трудные задачи снабжены подробными решениями или указаниями.

Книга предназначена для учащихся средних школ, подготовительных отделений институтов, а также для всех тех, кто самостоятельно готовится к вступительным экзаменам в вузы.

2. Яворский Б. М., Детлаф А. А. *Справочник по физике.* Издание 7-е, испр. Объем 46 л., тираж 150 000 экз., цена 2 р. 63 к.

В справочнике даны определения всех основных физических понятий, сформулированы основные физические законы и сущность описываемых ими явлений.

В справочнике отражены все разделы классической и современной физики.

Справочник рассчитан на широкий круг читателей.

3. *Над чем думают физики.* Выпуск 11. Лазеры. Сборник научно-популярных статей. Перевод с англ. Объем 10 л., тираж 50 000 экз., цена 50 к.

В сборниках «Над чем думают физики» публикуются популярные статьи крупнейших зарубежных физиков, внесших непосредственный вклад в рассматриваемые вопросы.

Этот, одиннадцатый, выпуск посвящен лазерам — одному из наиболее впечатляющих открытий современной физики. Статьи, публикуемые в сборнике, знакомят читателей с принципами работы, применением и перспективами лазеров. Они написаны живо и увлекательно и в целом доступны школьникам старших классов.

4. Завельский Ф. С. *Время и его измерение.* Издание 4-е, перераб. Объем 15 л., тираж 50 000 экз., цена 50 к.

В книге описаны некоторые процессы, происходящие в обыденном мире, а также в атомах, атомных ядрах, планетах, звездах и галактиках. Рассказано о длительности этих процессов, в одних случаях равной лишь миллионным долям миллиардной доли секунды, в других — миллиардам лет. Таким образом, сделан «разрез» мира по одной из основных его координат, а именно по времени. Такой подход позволил показать, как постепенно видоизменялось и совершенствовалось понятие о времени и к каким фундаментальным достижениям это привело.

Обо всем этом рассказано в форме, доступной читателям со средним образованием, а также стремящимся к науке школьникам старших классов.

Издательство «Просвещение»

5. Гуло Д. Д. *Н. А. Умов.* Объем 8 л., тираж 80 000 экз., цена 25 к.

Эта книга, выходящая в серии «Люди науки», посвящена одному из крупнейших русских физиков — Н. А. Умову. Она рассказывает о жизни, научной и педагогической деятельности ученого. Особое внимание уделяется научным трудам Умова.

Книга предназначена для широкого круга читателей.

6. Макареня А. А., Рысев Ю. В. *Д. И. Менделеев.* Объем 10 л., тираж 80 000 экз., цена 70 к.

В этой книге из серии «Люди науки» рассказывается о жизни и выдающихся открытиях великого русского ученого Д. И. Менделеева. Показывается его путь в науку и значение его трудов (учение о периодичности, о газовых законах и т. д.).

Книга иллюстрирована материалами из музея-архива Д. И. Менделеева.

Книга предназначена школьникам старших классов.

7. Тарасов Л. В. *Оптика, рожденная лазером.* Объем 10 л., тираж 100 000 экз., цена 35 к.

Автор этой книги, выходящей в серии «Мир знаний», интересно и доступно рассказывает о новых оптических явлениях, наблюдаемых при прохождении в среде лазерного луча и объединенных общим названием «нелинейная оптика».

Книга доступна широкому кругу читателей.

8. Куприн М. Я. *Физика в сельском хозяйстве.* Объем 12 л., тираж 100 000 экз., цена 65 к.

В этой книге автор рассказывает о применении законов физики в сельском хозяйстве на материале сельскохозяйственного производства. Учащиеся получают сведения о сельскохозяйственных машинах и аппаратах, основанных на законах механики, теплоты и электричества. Они узнают: «сколько гектаров можно обработать за день», «как воздухом убирают хлопок», «при какой температуре прорастают семена», «как очистить семена от сорняков» и много других интересных и полезных вещей.

Книга поможет учащимся сельских школ в выборе профессии.

И. Клумова,
М. Смолянский

Об аутентичности научных анекдотов

В научно-популярной литературе часто приводятся анекдоты о различных ученых. Некоторые из них повторяются неоднократно, хотя трудно сказать, соответствуют ли они действительности. В этой связи представляет интерес небольшое историческое исследование, которое провел в 1946 году физик Бернард Коэн по поводу письма одного из читателей английского журнала «Nature» («Природа»). Перевод и подготовка публикации В. Березина.

Письмо в редакцию

«В «Мемуарах» барона де Гримма, в том месте, где описывается запуск первого воздушного шара, который проходил в обстановке общего энтузиазма в Париже на Марсовом поле 27 июня 1783 года, читаем: «Среди восторженных свидетелей события затерялось немало лиц, настроенных холодно и не упускавших случая повторять: «Какая от всего этого польза? Заслуживает ли это изобретение, чтобы из-за него подымали столько шума?» Но мудрый Франклин (бывший в это время в Париже) ответил этим скептикам со свойственной ему простотой и выразительностью: «А зачем нужен новорожденный?»

Как мне известно, это изречение обычно приписывается Фарадею, а не Франклину. Так, в одной научно-популярной книге рассказывается (без всяких ссылок на источник), что после эксперимента, выполненного Фарадеем во время лекции, некая дама задала ему вопрос: «Послушайте, профессор, даже если это явление действительно происходит, то какой от него толк?». Она получила достойный ответ: «Мадам, а вы ответьте, какая польза от новорожденного?»

Клемент Уэбб

Ответ редакции

«Известны два анекдота о Фарадее и пользе научных открытий. Эти анекдоты встречаются в той или иной форме у разных авторов девятнадцатого и двадцатого столетий в работах по истории науки. Обычно они рассказываются в связи с открытиями Фарадея в области электромагнитных явлений. Суть их в следующем. Некий важный чиновник (чаще всего — сам премьер-министр) наносит Фарадею визит и, застав его за демонстрацией индукционного тока, спрашивает: «Какая польза может быть извлечена из этого открытия?». Согласно одному анекдоту Фарадей отвечал: «А какая польза от новорожденного?». Согласно другому: «Недалеко то время, когда вы сможете ввести новый налог.»

Первый из двух ответов приписывается также одному из предшественников Фарадея в изучении природы электричества — Бенджамену Франклину. Этот ответ столь точно выражает чувства людей, занимающихся наукой, что представляется уместным пролить свет на подлинные обстоятельства, при которых его произносили и Франклин, и Фарадей.

В 1783 году Франклин в качестве полномочного посла представлял в Париже интересы Американских колоний и был свидетелем нескольких запусков воздушных шаров. Проявляя, естественно, к ним больший интерес, чем простой наблюдатель, Франклин написал несколько научных отчетов об этих экспериментах. В частности, он писал: «Общество разделилось на тех, кто глубоко удовлетворен экспериментами и приведен в восхищение достигнутым успехом, и на тех, кто толкует о различных возможных его применениях, часто экстравагантных.» Очевидно, отвечая на вопросы последних, Франклин и произнес свое знаменитое: «А какая польза от новорожденного?». (В библиотеке Пенсильванского университета в бумагах Франклина хранится посланное ему в то время письмо, автор которого «не понял, почему доктор Франклин называет воздушный шар новорожденным ребенком».)

Майкл Фарадей использовал изречение Франклина в 1816 году на лекции перед членами философского общества. Лекция была на тему «О кислороде, хлоре, йоде и фторе». По ходу лекции Фарадей, в частности, сказал: «Перед тем, как перейти к хлору, я коснусь истории его открытия с тем, чтобы предупредить вопросы некоторых слушателей, которые имеют привычку спрашивать о всяком новом явлении: «А какая от него польза?». Доктор Франклин им отвечал: «А какая польза от новорожденного?»

Второй анекдот, касающийся ответа Фарадея на тот же пресловутый вопрос о пользе научного открытия, не имеет ссылок на авторитетных биографов Фарадея. Анекдот неправдоподобен. Мы, однако, не можем доказать, что Фарадей и не говорил таких слов премьер-министру. Но второй анекдот, в отличие от анекдота о новорожденном,— сомнительный. Впрочем, случается, что исследования в истории науки раскрывают истинность эпизодов, которые считались сомнительными в течение столетий. Наиболее известный из таких анекдотов — о Ньютоне и упавшем яблоке. Долгое время эта история считалась нелепой выдумкой. Но в наши дни анекдот находит подтверждение. Так, он приводится в биографии Ньютона, написанной его другом и почитателем, известным собирателем древностей Уильямом Стакли. Книга эта была написана в 1752 году, а опубликована только в 1936. Ньютон и он, как пишет Стакли, пили чай в тени яблонь, и Ньютон сказал, что все окружающее напоминает ему тот момент, когда он разобрался в сути природы тяготения. Это случилось, когда падало яблоко, и Ньютон был настроен на размышления...

Если рассказ, который в течение многих лет считался плодом досужей фантазии, оказался правдивым, то, может быть, со временем окажется истинным рассказ о Фарадее и премьер-министре. Но пока еще этого не произошло».

И. Бернард Коэн

Заочная физическая школа

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете Московского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени государственного университета им. М. В. Ломоносова объявляет набор учащихся в 9-й класс на 1977/78 учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику в объеме программы средней школы, а также лучше подготовиться к вступительным экзаменам по физике в вуз, в первую очередь — на физический факультет МГУ.

Прием учащихся в ЗФШ проводится на основании результатов решения вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать *до 15 сентября* по адресу: *117234, Москва, Ленинские Горы, МГУ, Физический факультет, Заочная физическая школа.* Вместе с решениями задач в конверт нужно вложить анкету, заполненную по следующему образцу:

Фамилия, имя, отчество . . . . *Петров Николай Иванович*

Номер и адрес школы . . . . *школа № 1, ул. Ленина, д. 2*

Профессия родителей и занимаемая должность

отец . . . . *токарь, мастер участка*

мать . . . . *бухгалтер*

Подробный домашний адрес . . . . *246045, г. Гомель, ул Садовая, д. 31, кв. 24*

Член ВЛКСМ, КПСС . . . . *член ВЛКСМ*

Зачисленные в ЗФШ получают в течение года задания Заочной физической школы по разделам физики, изучаемым в соответствующих классах средней школы. Задания содержат: а) изложение основных разделов и методов решения наиболее характерных физических задач; б) задачи с подробными решениями, способствующие более глубокому пониманию основных разделов физики; в) условия контрольных задач, решения которых учащиеся должны выслать в ЗФШ. Выполненное задание рецензируется и высылается учащимся.

Учащиеся 9-х классов по окончании года переводятся в 10-й класс на основании оценок, полученных за решение контрольных заданий. Успешно закончившие ЗФШ получают справку об окончании Заочной физической школы при физическом факультете МГУ.

Вступительное задание

1. По гладкой плоскости, имеющей угол наклона к горизонту α, скатывается без трения тележка (рис. 1). На тележке находится тело массы m. Найти силу давления этого тела на тележку.

2. На горизонтальной шероховатой поверхности стоит однородный куб массы M. Какую минимальную силу надо приложить к середине верхнего ребра куба, чтобы он опрокинулся без проскальзывания? Коэффициент трения между кубом и поверхностью μ.

3. В горлышко сосуда, заполненного газом при температуре T_0 и давлении p_0, вставлен поршень, который может перемещаться внутри горлышка без трения (рис. 2). С наружной стороны поршень присоединен к пружине жесткостью k. В исходном состоянии равновесия газ занимает объем V_0. Сосуд медленно нагревают до температуры T_1. Найти результирующее изменение объема, если площадь поршня S.

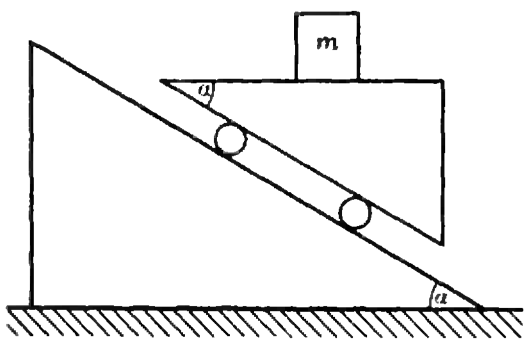


Рис. 1.

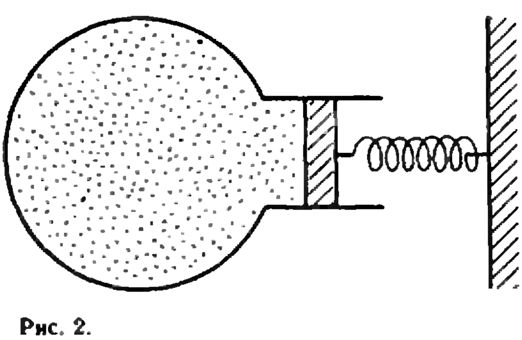


Рис. 2.

Вечерняя физическая школа

Уже два года на физическом факультете МГУ работает Вечерняя физическая школа (ВФШ) для школьников 8-10 классов Москвы и Подмосковья. Обучение в школе очное. В ВФШ принята система «лекции—семинары». На лекциях основное внимание уделяется разбору наиболее сложных вопросов школьной программы. Эти лекции читают преподаватели физического факультета. Семинары ведут аспиранты и студенты старших курсов, имеющие большой опыт руководства школьными физическими кружками. Для учащихся ВФШ организуются экскурсии в лаборатории физического факультета МГУ, в Научно-исследовательский институт ядерной физики и Государственный астрономический институт им. Штернберга. Дружеские связи установились у нашей школы с физико-математической школой при Объединенном институте ядерных исследований в г. Дубне. В этом году группа лучших учащихся ВФШ приняла участие в научной конференции школьников г. Дубны.

В сентябре этого года в третий раз состоится конкурсный набор в ВФШ. Принять участие в конкурсе могут школьники 8-10 классов (в 9 и 10 классы проводится дополнительный набор). Для участия в конкурсе нужно *до 20 сентября* подать заявление на имя директора ВФШ, заполнить анкету в Комитете ВЛКСМ физического факультета, а также сдать 2 фотографии размером 3×4 *см*.

Прием заявлений будет происходить со 2 по 20 сентября с 16.00 до 18.00 ежедневно *(кроме воскресенья)* в Комитете ВЛКСМ физического факультета МГУ (здание физического факультета, комната 2-47).

Зачисление в школу производится по результатам собеседования. Требования по собеседованию не выходят за рамки школьной программы.

Наш адрес: Москва, Ленинские Горы, МГУ, Физический факультет. Телефон для справок: 139-26-56.

Проезд: метро до станции «Университет», затем автобусами 103, 119, 130, троллейбусами 4, 34, 49 до остановки «ул. Лебедева».

К задачам «Последние цифры»
(см. с. 26)

1. Указание. a^4-1 делится на 80, поэтому число A кончается $n-1$ нулем и затем единицей.

2. Указание. а) Воспользоваться принципом математической индукции. б) $B^{2q}-B^q$ делится на 10^n, но B нечетно, поэтому B^q-1 делится на 2^n, а b^r делится на 5^n.

3. Указание. c^4 кончается цифрой 6. Далее решать аналогично задаче 2.

4. Следует из задач 1—3.

5. 267.

7. Поскольку $4^{9}=2^{18}>500^2>200\,000$, из задачи 3а) следует, что вычитаемое имеет на конце более 200 000 автоморфных цифр. Уменьшаемое согласно утверждению задачи 1 кончается на ...0001, а разность имеет на конце более 200 000 автоморфных цифр.

9. 9 989 999.

К ребусам
(см. «Квант» № 5, 3-ю с. обл.)

«Числовая яхта». См. рис. 1.

«Квантово-волновые ребусы». $15\,302\times 4=61\,208$, $17\,634\times 4=70\,536$, $13\,659\times 6=81\,954$.

К статье «Качающаяся скала»
(см. «Квант» № 7)

1. Отклонение камня на опоре в положение, показанное на рисунке 2 в статье, можно представить как два последовательных перемещения: 1 — перенос камня в пространстве параллельно самому себе так, чтобы камень стал касаться опоры в точке A (при этом точка O будет находиться на продолжении радиуса опоры OA); 2 — поворот камня по часовой стрелке вокруг центра O на угол $\alpha+\beta$ $\left(\beta=\frac{R}{r}\alpha\right)$.

При первом движении все точки камня, в том числе и точки O и P, опустятся на

$$\Delta h_1=(R+r)-(R+r)\cos\alpha.$$

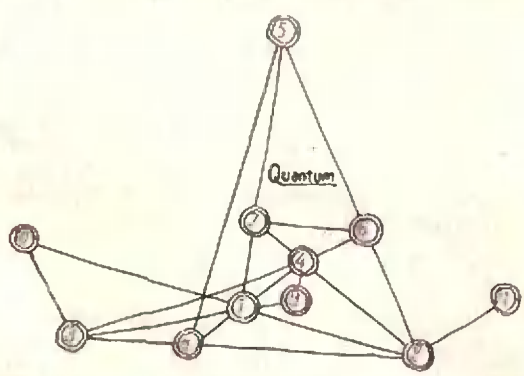


Рис. 1.

Воспользуемся без вывода приближенной формулой $\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$, справедливой для малых углов α. Тогда

$$\Delta h_1 = (R + r)\frac{\alpha^2}{2}.$$

При втором движении центр тяжести камня поднимается на

$$\Delta h_2 = (r - CP)\frac{(\alpha+\beta)^2}{2}.$$

Равновесие устойчиво, когда потенциальная энергия камня минимальна. Значит, при отклонении камня его центр тяжести поднимается, т. е. $\Delta h_2 > \Delta h_1$. Подставляя в это неравенство выражения для Δh_1 и Δh_2, получаем условие устойчивого равновесия камня на опоре

$$CP < \frac{Rr}{R+r}.$$

2. При отклонении ваньки-встаньки на шаре на угол α без проскальзывания Δh_1 и Δh_2 равны соответственно (см. задачу 1): $\Delta h_1 = 2R\,(1-\cos\alpha)$, $\Delta h_2 = OP\,(1-\cos 2\alpha)$. Для максимального угла отклонения α_0 справедливо равенство

$$2R\,(1-\cos\alpha_0) = OP\,(1-\cos 2\alpha_0)$$

(смысл величины OP ясен из рисунков в статье). Используя соотношение $\cos 2\alpha_0 = 2\cos^2\alpha_0 - 1$, из последнего равенства получаем, что точка P находится на оси на расстоянии $\frac{R}{1+\cos\alpha_0}$ от центра O.

3. Из условия равновесия следует, что центр тяжести полушария находится на расстоянии $5/8r$ от его вершины. Те, кто знаком с элементами высшей математики, могут проверить, что именно там окажется центр тяжести однородного полушария.

К задачам «Квант» для младших школьников»
(см. «Квант» № 7)

1. 45. Указание. Среди чисел, начинающихся цифрой 1, такое число лишь одно (10), среди начинающихся цифрой 2 — два (20, 21) и т. д.

2. Два решения: $102 = 1\cdot 12 + 6\cdot 15 = 6\cdot 12 + 2\cdot 15$. Указание. Число кусков длины 15 *см* должно быть четно, а общая длина кусков по 12 *см* — кончаться цифрой 2.

3. Нет, не может. Указание. Ось симметрии должна проходить через центр симметрии, который должен совпадать с одной из точек фигуры, и этой оси должно принадлежать нечетное число точек фигуры.

4. 4 способа (резать прямоугольник надо либо по диагонали, либо от вершины до середины какой-либо стороны).

5. «Хлопчатник».

К статье «Случай с пятиклассником»
(см. «Квант» № 7)

1. а) Из уравнения $10a+b = 2(a+b)$ находим $8a=b$, подходит лишь $a=1$, $b=8$, ответ: а) 18; б) 27; в) 12, 24, 36, 48; г) 45; д) 54; е) 21, 42, 63, 84; ж) 72; з) 81.

2. Если исходное число равно $100a+10b+c$, то сумма равна $222\,(a+b+c)$. Если среди цифр исходного числа могут быть одинаковые, то сумма заведомо делится лишь на 111 (пример: $a=b=c=1$). Если есть нуль, то ничего сказать нельзя (пример: 201; $201+102+210+120=633$).

3. 33 и 39.

К заметке «Квадратное уравнение»
(см. «Квант» № 7, с. 9)

Если один корень квадратного уравнения равен 1, то сумма коэффициентов уравнения равна нулю, а второй корень по теореме Виета равен отношению свободного члена к коэффициенту при x^2.

К головоломкам
(см. «Квант» № 7, 3-ю с. обл.)

«Удивительные цифры»

```
      5
    1   8
  7   4   3
    2   6
      9
```

Указание. Сумма цифр каждого слагаемого и результата кратна 9.

«Кросснамбер»

6543
1681
2345
5210

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, А. Пономарева, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Л. Боровина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, «Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 25/V 1977 г.
Подписано в печать 4/VII 1977 г.
Бумага 70×108¹/₁₆. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 6,69. Т-13222
Цена 30 коп. Заказ 1106. Тираж 289 550 экз.

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

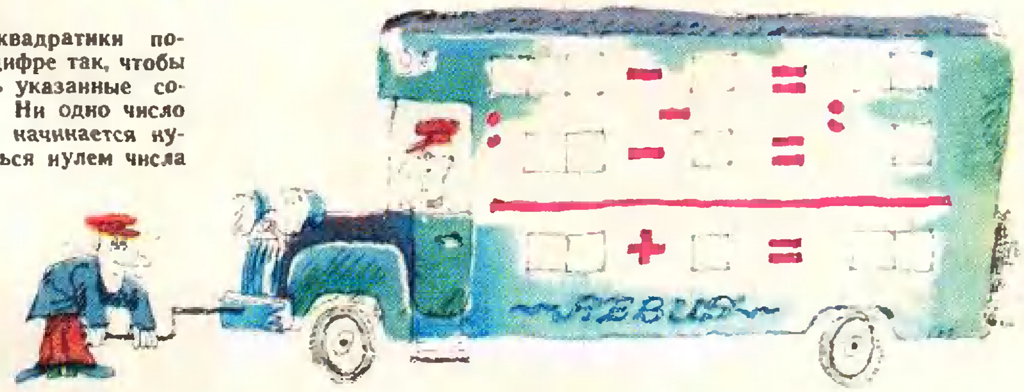
Л. Мочалов

Полным комплектом

На рисунках 1 и 2 вы видите все 28 косточек домино (вместо точек на костях стоят цифры), из которых сложены два одинаковых числовых прямоугольника. А сможете ли вы сложить из всего комплекта костей домино два числовых прямоугольника, повторяющих изображенный на рисунке 3?

Числовой ребус

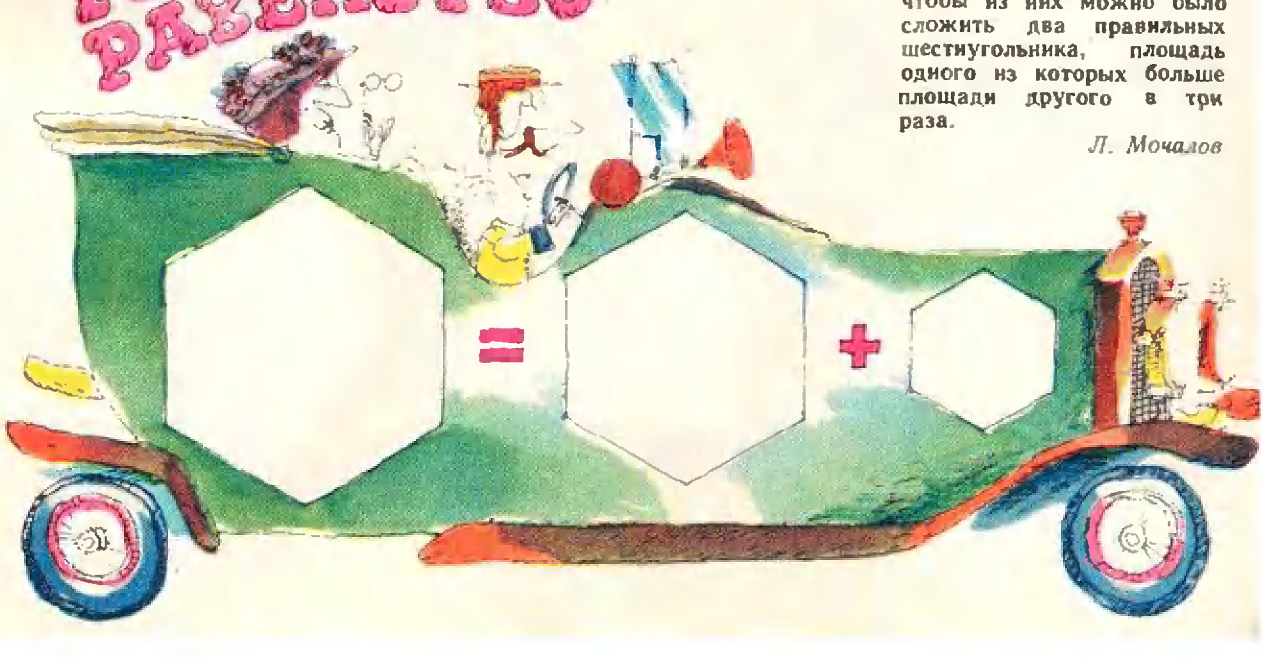
В пустые квадратики поставьте по цифре так, чтобы выполнялись указанные соотношения. Ни одно число в ребусе не начинается нулем (кончаться нулем числа могут).



Геометрическое равенство

Разрежьте правильный шестиугольник на 7 частей так, чтобы из них можно было сложить два правильных шестиугольника, площадь одного из которых больше площади другого в три раза.

Л. Мочалов



Индекс 70465
Цена 30 коп.

К нашим читателям

Объявляется подписка на 1978 год на научно-популярный физико-математический журнал «Квант».

●

«Квант» адресован всем школьникам 5—10 классов, которые любят математику и физику.

Наш журнал полезен и тем школьникам, интерес которых к точным наукам еще дремлет.

На страницах нашего журнала публикуются статьи обзорного характера, рассказывающие о достижениях науки и о проблемах, еще ждущих своего решения.

В журнале читатель найдет много задач. Среди них — задачи вступительных экзаменов в вузы, задачи различных олимпиад и просто интересные задачи.

●

Наш журнал полезен и учителям. Сейчас произведены коренные изменения в школьных курсах математики и физики. В «Кванте» публикуются материалы для занятий математических и физических кружков, материалы для факультативных занятий и статьи, разъясняющие и расширяющие новую программу.

Материалы, публикуемые в разделе «По страницам школьных учебников», будут освещать наиболее тонкие и важные вопросы математики, затронутые в школьных учебниках.

●

В 1978 году «Квант» открывает новую рубрику: «Искусство программирования». Этот раздел будет посвящен рассказу о взаимоотношениях человека с ЭВМ и обучению различным алгоритмическим языкам, на которых пишутся программы, понятные машинам.

●

Какие вопросы и задачи могут ожидать абитуриента на вступительных экзаменах по новым программам? Ответ на этот и многие другие вопросы читатель найдет в разделе «Практикум абитуриента».

В 1978 году мы планируем значительно расширить раздел ««Квант» для младших школьников».

Журнал постоянно помещает рецензии на книги — уже вышедшие и еще только готовящиеся к изданию.

●

ЖУРНАЛ РАСПРОСТРАНЯЕТСЯ ТОЛЬКО ПО ПОДПИСКЕ.

●

При подписке ссылайтесь на наш индекс 70465. Цена номера 30 коп.